

UDC 621.376.33:621.372.543.2

## 正弦波変調FM信号入力に対する 单一同調フィルタ出力の一近似表示法

岩波 保則 池田 哲夫

岩波保則、池田哲夫：正員 名古屋工業大学工学部電気工学科

An Approximate Expression of the Output of a Single-Tuned Filter with a FM Carrier Input Modulated by a Sine Wave. By Yasunori IWANAMI and Tetsuo IKEDA, Regular Members (Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya-shi, 466 Japan).

論文番号：昭57-技 87[B-39]

|||||

あらまし 正弦波変調FM信号が入力される单一同調フィルタの出力を、フィルタリングによるひずみがあまり大きくなき領域で極めて簡易な形で求めた。

### 1. まえがき

周波数変調信号が入力される線形フィルタの応答を求める問題は古くから存在するものであるが、内在する非線形性のために応答を厳密かつ簡易に表現する方法は現在のところない。したがって、応答は近似解析手法、数値計算法あるいはモンテカルロシミュレーションなどを用いて求められてきている。

近似解析手法としては、古くは Carson - Fry の方法が有名である<sup>(1)</sup>。その後多くの方法が発表されたが、近年では、Bedrosian - Rice の方法<sup>(2)</sup>が計算の容易さや数値計算に適している点などから注目されている。<sup>(1)</sup>しかし、この Bedrosian - Rice の方法にしても、数値積分を繰り返し行う必要があり、極めて簡易というわけではない。

そこで、本論文では、変調信号として正弦波、線形フィルタとして单一同調フィルタを考え、フィルタリングによる帯域制限効果があまり大きくなき領域に対し、準線形近似および平滑化近似を用い、フィルタ出力を極めて簡易な形で求める方法を得たので報告する。

また、数値計算による厳密値との比較を行い、近似度を検討した。尚、変調信号がガウス過程の場合の同様な導出は、すでに文献(3)で報告している。

### 2. 本文

单一同調フィルタへ入力されるFM信号と单一同調フィルタの出力をそれぞれ次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} v_{in}(t) &= A \cos\{\omega_0 t + \phi_{in}(t)\} \\ \phi_{in}(t) &= B \sin(\omega_m t + \varphi_1) + \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$v_{out}(t) = B(t) \cos\{\omega_0 t + \phi_{out}(t)\} \quad (2)$$

但し、 $A$ は入力FM信号振幅、 $\omega_0$ は中心角周波数、 $\phi_{in}(t)$ は入力位相、 $\beta$ は変調指数、 $\omega_m$ は変調信号角周波数であり、 $\varphi_1$ および $\phi_1$ はそれぞれ変調信号および搬送波の位相を決定するためのものである。また、 $B(t)$ は出力FM信号振幅、 $\phi_{out}(t)$ は出力位相を表す。

また、单一同調フィルタの伝達関数は、

$$T(p) = 2\lambda\omega_0 p / (p^2 + 2\lambda\omega_0 p + \omega_0^2) \quad (3)$$

と表される。但し、 $\lambda$ は制動係数、 $p = d/dt$ 。

ここで、等価低域系の概念を用いると、式(1)～(3)より次式が得られる<sup>(3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \cos \epsilon(t) &= \dot{B}(t) / (\alpha A) + B(t)/A \\ \sin \epsilon(t) &= B(t) \dot{\phi}_{out}(t) / (\alpha A) \\ \epsilon(t) &= \phi_{in}(t) - \phi_{out}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

但し、 $\cdot$ は時間微分、 $\alpha$ は单一同調フィルタの片側半值角帯域幅であり、 $\alpha = \lambda\omega_0$ である。

次に、フィルタリングによる帯域制限ひずみがあまり大きくなき領域では、出力位相はやはり正弦波で近似できるとし、次式を仮定する。

$$\phi_{out}(t) = \beta' \sin(\omega_m t + \varphi_2) + \phi_2 \quad (5)$$

すると、式(1), (4), (5)より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(t) &= \Delta \sin \theta(t) + \Delta \phi \\ \Delta &= \sqrt{(\beta - \beta' \cos \Delta \phi)^2 + \beta'^2 \sin^2 \Delta \phi}, \Delta \phi = \varphi_1 - \varphi_2 \\ \theta(t) &= \omega_m t + \varphi_1 + \eta, \Delta \phi = \phi_1 - \phi_2 \\ \cos \eta &= (\beta - \beta' \cos \Delta \phi), \sin \eta = \beta' \sin \Delta \phi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)で $\Delta$ 、 $\Delta \phi$ 、 $\Delta \phi$ 、 $\eta$ は定数であり、 $\varphi_1$ は $0 \sim 2\pi$ で一様分布する確率変数とする。

ここで、式(4)の第1式と式(6)より、

$$B(t)/A = \{\alpha/(p+\alpha)\} \cos\{\Delta \sin \theta(t) + \Delta \phi\} \quad (7)$$

となるが、 $\Delta$ のあまり大きくなき領域で低域フィルタの平滑化(smoothing)作用により、式(7)を、

$$B(t)/A \approx \overline{\cos\{\Delta \sin \theta(t) + \Delta \phi\}} = J_0(\Delta) \cos \Delta \phi \quad (8)$$

と近似する。但し、 $\overline{\quad}$ は時間平均、 $J_n(\quad)$ は $n$ 次の第1種ベッセル関数。

すると、式(8)より $B(t)$ は定数となるが、これと式(4)の第2式および式(5), (6)から次式を得る。

$$\overline{\sin \epsilon(t)} = J_0(\Delta) \sin \Delta \phi = 0 \quad (9)$$

さらに、式(4)の第2式の左辺、式(6), (9)の組み合せにおいて、 $\Delta$ のあまり大きくなき領域で、

$$\sin \epsilon(t) = \sin\{\Delta \sin \theta(t)\} \approx 2J_1(\Delta) \sin \theta(t) \quad (10)$$

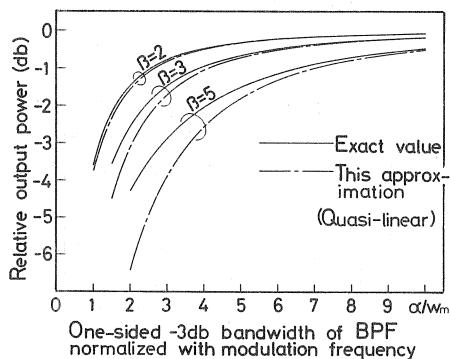


図1 単一同調フィルタの出力FM信号電力の比較

Fig.1-Comparison of output FM signal power between approximate and exact value.

なる準線形近似を用いれば<sup>(3)</sup>、式(1), (2), (4), (6), (8)~(10)より次式で表される近似出力を得る。

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{out}}(t) &= AJ_0(\Delta) \cos\{\omega_0 t + \phi_{\text{out}}(t)\} \\ \phi_{\text{out}}(t) &= \{G_{eq} \alpha / (P + G_{eq} \alpha)\} \phi_{in}(t) \\ \Delta &= |j\omega_m / (j\omega_m + G_{eq} \alpha)| \beta \\ G_{eq} &= \{2J_1(\Delta)\} / \{AJ_0(\Delta)\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)の近似出力では、フィルタリングによる振幅のひずみを  $J_0(\Delta)$  なる量で、位相のひずみをしゃ断角周波数  $G_{eq} \alpha$  の1次の低域フィルタリングで表している。

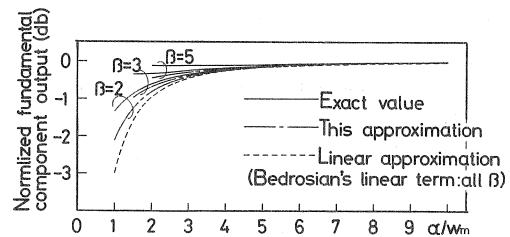
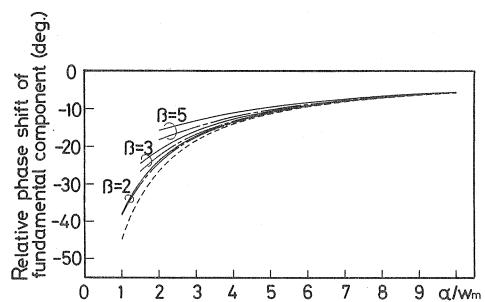
また、この近似出力は、式(11)の第3, 4式により表される超越方程式を数値計算すれば極めて容易に求められる。

式(11)の近似度を調べるために、単一同調フィルタ通過後のFM信号電力、復調出力の基本波成分の大きさ、復調出力の基本波成分の位相特性の3項目について、厳密値<sup>†</sup>との比較を行った結果をそれぞれ図1, 図2, 図3に示す。図1~3より、単一同調フィルタの帯域制限効果があまり大きくない(フィルタリングによるFM信号電力損失があまり大きくない)領域では、本方法は良い近似になることがわかる。また、Bedrosianの線形項近似<sup>(2)</sup>に比べ近似度が向上することもわかる。

### 3. むすび

正弦波変調FM信号が入力される単一同調フィルタ

<sup>†</sup> この場合の厳密値は、入力FM波をフーリエ級数展開することにより数値的に求め得る。

図2 復調基本波成分の振幅  
Fig.2-Normalized amplitude of fundamental component of demodulated output.図3 復調基本波成分の相対位相シフト  
Fig.3-Relative phase shift of fundamental component of demodulated output.

の出力をフィルタリングによるひずみがあまり大きな領域で極めて簡易な形で表示する方法を示し、また厳密値との比較を行って近似度を確認した。本方法の表示式は、ひずみの十分小さい場合は Bedrosian-Rice の級数展開表示式<sup>(2)</sup>の線形項に一致し、本表示式はこの線形項の拡張とも考えられる。

フィルタリング出力の近似表示法は種々あるが、本方法は極めて簡便であるため通信システムの解析、設計等に応用し易いものと思われる。

### 文 献

- (1) Williams, Jr., O.E.: "Comparison of Bedrosian-Rice and Carson-Fry methods for calculating angle-modulation distortion", IEEE Trans. Commun., COM-21, 8, pp. 971-975 (Aug. 1973).
- (2) Bedrosian, E. and Rice, S.O.: "Distortion and crosstalk of linearly filtered, angle-modulated signals", Proc. IEEE, 56, 1, pp. 2-13 (Jan. 1968).
- (3) 岩波、根元、佐藤: "FMFB復調器の準線形近似を用いたスレッシュホールド解析と設計", 信学論(B), J 63-B, 12, pp. 1224-1231 (昭55-12).  
(昭和56年12月23日受付, 57年2月1日再受付)