

# 付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の解析法

—鉄筋・付着とも弾性的の場合—

正会員 市之瀬 敏 勝\*

## §1. 序

既往の実験的研究によれば、短柱やはり柱接合部における鉄筋の付着破壊は、地震時の骨組の耐力保持能力とエネルギー消費能力を確保する上で、せん断破壊と同様に大きな障害となる<sup>(1),(2)</sup>。

鉄筋の付着特性を考慮する既往の解析法は、有限要素法などの二次元解析法がほとんどである。これらは、せん断破壊など他の破壊モードも取扱える言わば万能型の解析法である。万能ゆえに、繰返し変形時の材料モデルの設定などに関して今なお未解決の問題をかかえている。またパラメトリックな解析を行うには計算時間がかりすぎる。

本報で提案する解析法は、部材を一次元の線材に置換する。構成方程式として、鉄筋とコンクリートの一軸応力ひずみ特性、および付着すべり特性のみを使用するので、繰返し変形時の解析が容易なことが1つの特徴である。もう1つの特徴は、部材変形の自由度を、

- (a)部材両端での回転角と軸方向変形（4個）
- (b)隣接接合部からの上下主筋の抜け出し量（4個）

の計8個に限定するため、計算時間が短くパラメトリックスタディが容易であり、比較的大きな骨組の解析も可能なことである。応力のつりあいは、主筋に沿う付着応力度と、部材両端での曲げモーメントと軸力のみを考慮する。ただし、部材に与えられた自由度（8個）の範囲内で、できる限り実際の部材挙動を反映するように部材変形仮定を工夫した。本解析法は、多田、武田<sup>(5)</sup>の方法と同一系統であるが、部材変形仮定、および部材剛性行列の構成が異なる。多田・武田<sup>(5)</sup>は剛性行列を使用せず漸近法で解析を行っている。

本解析法の欠点は、せん断破壊と付着特性の関連を調べられないことである。せん断破壊が先行する部材における付着特性の重要性、付着破壊に伴うせん断抵抗機構の変化などに関しては、実験的・解析的に論じられている（例えば野口ら<sup>(4)</sup>）。しかし、短柱<sup>(1)</sup>やはり柱接合部<sup>(2)</sup>の実験では、せん断破壊が生じないで付着破壊のみが進

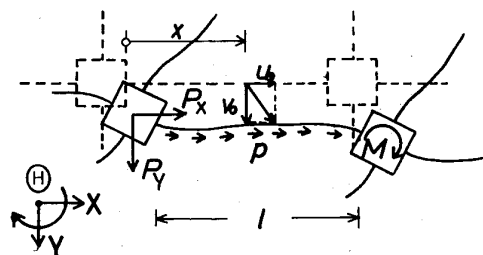


Fig. 1 Frame Co-ordinates

行する試験体の例もきわめて多く、文献<sup>(1)</sup>では試験体数157体のうち42%を占める。こうした問題には本報の解析法で十分対応できるものと筆者は考える。

本報では、解析法の仮定を説明し、主筋・付着とも弾性的の場合について部材剛性行列の構成を示す。また、逆対称曲げを受ける部材について解析例を示す。

なお、本報の解析法は、拙論<sup>(6)</sup>をもとに、解析仮定に関して若干の改良を加えたものであり、筆者の学位論文<sup>(7)</sup>の一部である。

## §2. 骨組の外力と変位、部材の内力と変形の定義

本研究は、柱・はり部材と接合部から成る剛接平面骨組を対象とする。柱・はり部材は、曲げ変形（曲率  $\kappa$ ）と軸方向変形（材軸ひずみ度  $\epsilon_0$ ）のみ考慮した、太さの無い線材に置換する。せん断変形は考慮しない。

接合部数  $n$  個、部材数  $m$  個から成る骨組を考える。骨組の外力は、Fig. 1のように、接合部に加わる水平力  $P_x$ 、鉛直力  $P_y$ 、回転モーメント  $M$ 、および柱・はり部材の材軸方向に一樣に分布して加わる力  $P$  を考える。これらをまとめて、骨組の外力ベクトル  $F$  を次のようにあらわす。

$$\left. \begin{aligned} {}_jF^T &= \{P_x, P_y, M\}_j, \quad j=1, \dots, n \\ {}_mF^T &= \{P_{mi}\} = \{p \cdot l_i\}, \quad i=1, \dots, m, \quad l: \text{部材長} \\ F^T &= \{{}_1F^T, \dots, {}_nF^T, {}_mF^T, \dots, {}_mF^T\} \end{aligned} \right\} (1)$$

上記に対応する骨組の変位ベクトル  $D$  を下に示す。

$$\left. \begin{aligned} {}_jD^T &= \{U_x, U_y, \theta\}_j, \quad j=1, \dots, n \\ {}_mD^T &= \{U_{mi}\}, \quad i=1, \dots, m \\ D^T &= \{{}_1D^T, \dots, {}_nD^T, {}_mD^T, \dots, {}_mD^T\} \end{aligned} \right\} (2)$$

このうち、 $U_x, U_y, \theta$  は、接合部の水平・鉛直変位および回転角とする。 $U_m$  は、部材途中の任意の位置下の

\* 名古屋工業大学 助手・工博

(昭和57年7月30日原稿受理日, 昭和58年2月1日改訂原稿受理日, 討論期限昭和58年8月末日)

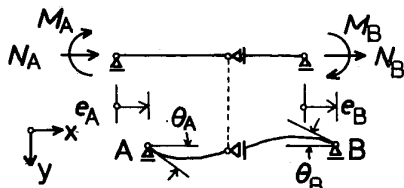


Fig. 2 Member Co-ordinates

変位の Fig. 1 のように  $(u_0, v_0)$  としては、次式で定義する。

$$U_M = \frac{1}{l} \int_0^l u_0 dx, \quad x: \text{材軸に沿う座標軸} \quad (3)$$

$u_0, v_0$  は、部材長  $l$  に比べて十分に小さいものとし、曲率  $\kappa$  と材軸ひずみ度  $\epsilon_0$  を下式のように定義する。

$$\kappa = d^2 v_0 / dx^2 \quad (4)$$

$$\epsilon_0 = du_0 / dx \quad (5)$$

部材の変形は、 $v_0$  が材軸方向に連続であるように起こるものとする。 $dv_0/dx$  や  $u_0$  の不連続は許容し、この場合  $\kappa$  や  $\epsilon_0$  は Dirac のデルタ関数を用いてあらわす。

部材  $i$  の内力ベクトル  $f_i$  は、Fig. 2 に示す部材両端のモーメント  $M_A, M_B$  と軸方向力  $N_A, N_B$  により、

$$f_i^T = \{M_A, N_A, M_B, N_B\}^T \quad (6)$$

と定義する。部材  $i$  の変形ベクトル  $d_i$  は、

$$d_i^T = \{\theta_A, e_A, \theta_B, e_B\}^T \quad (7)$$

$$\theta_A = -\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \kappa dx \quad \theta_B = \int_0^l \frac{x}{l} \kappa dx \quad (8)$$

$$e_A = -\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \epsilon_0 dx \quad e_B = \int_0^l \frac{x}{l} \epsilon_0 dx \quad (9)$$

と定義する。 $\theta_A, \theta_B$  は、Fig. 2 のように座標系をとったとき部材両端の回転角となる。 $e_A, e_B$ 、材軸方向変位の平均値  $U_M$  を基準としたときの、部材両端の軸方向変位となる。

### § 3. 鉄筋連続法の解析仮定

本報で提案する解析法を鉄筋連続法と呼ぶ。鉄筋連続法とは、主筋とコンクリートとの間の付着すべりを考慮し、材料（主筋・コンクリート・付着）の非線形構成則に立脚した線材解析法である。解析法の最大の特徴は、付着応力度のつり合い条件とすべりの適合条件、すなわち「主筋の応力度と変位の連続性」を、部材と接合部の中で連続的に満足させることにある。

解析対象は、部材途中で断面が変化せず、かつ主筋が上端筋と下端筋のみからなる骨組とする。多段配筋部材への拡張は容易<sup>(7)</sup> だが、本報では述べない。上端筋と下端筋とで、降伏応力度・鉄筋量・付着特性などが異なってもよい。

部材座標系における主筋とコンクリートの材軸方向への変位  $s, c_u$  は一般に異なるを考える。コンクリートから見た主筋の相対変位、

$$s = s_u - c_u \quad (10)$$

をすべり量と定義する。

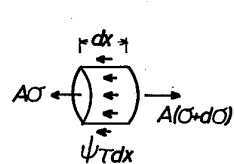
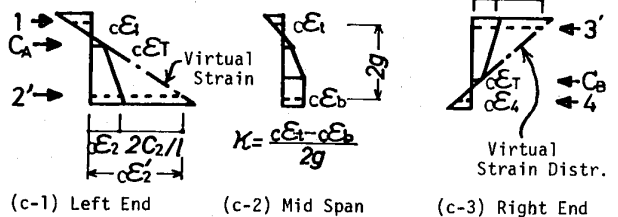
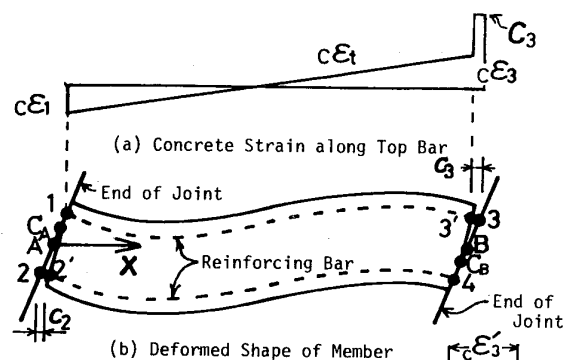


Fig. 3 Equilibrium of Bond Stress



(c) Strain Distribution of Concrete in Section

Fig. 4 Assumed Strain Distribution of Member

鉄筋連続法の解析仮定は、以下に示す 8 項である。これらのうち、(1) と (2) は力のつり合いに関するものである。(3)~(8) は、コンクリートの変形状態を規定したものであり、変位関数の設定ということもできる。主筋は、このようなコンクリートの拘束のもとで、付着すべりの適合条件 [(10)式] と付着応力度のつり合い条件 [仮定(2)] を満足するように変形する。

仮定(1)：断面軸力・モーメントと部材内力とのつり合いは、部材両端でのみ考慮する。

仮定(2)：主筋応力度  $\sigma$  の材軸 ( $x$  軸) 方向へのこう配  $d_s \sigma / dx$  は、すべり量  $s$  の関数として与えられる付着応力度  $\tau$  によって生じる。すなわち Fig. 3 のように考えて、

$$A \cdot d_s \sigma / dx = \phi \cdot \tau \quad (11)$$

$A$ ：主筋断面積  $\phi$ ：主筋の周長とする。上記の関係は、部材と接合部内の主筋に関して、あらゆる位置で考慮する。

仮定(3)：接合部のコンクリートは剛とする。ただし、主筋のひずみと付着すべりは接合部内でも許容する。

仮定(4)：鉄筋の抜け出しによって生じるコンクリートの変位  $c_u$  の不連続を「ひびわれ」と呼ぶ。「ひびわれ」は、部材端の上端または下端でコンクリートの材軸方向ひずみ度  $c\epsilon$  がひびわれ条件ひずみ度  $c\epsilon_T$  を越えたときに発生し、ひびわれ先端でのひずみ度も  $c\epsilon_T$  とする。部材の変形状態を Fig. 4(b) に示す。部材途中では、コンクリートのひずみ度がいくら大きくなってもひびわれは生じない。

部材両端の主筋位置 (Fig. 4(b) の 1~4) でのひびわれ幅を  $c_1 \sim c_4$  とあらわす。Fig. 4(b) では  $c_1 = c_4 = 0, c_2, c_3 > 0$  である。ひびわれ幅は、接合部と部材からの主筋

の抜け出し量の和である。Fig. 5 のように、部材端の全面にひびわれが生じる変形も許容する。

仮定(5)：ひびわれが生じた場合、ひびわれ面での鉄筋のひずみとコンクリートのひずみ度は、Fig. 6(b)の両引試験体モデルの両端の主筋ひずみ度  $c\bar{\epsilon}$  とコンクリート平均ひずみ  $\bar{c\epsilon}$  との関係によって結びつけられるものとする。 $c\bar{\epsilon}$  には、Fig. 6(c)(d)のようなひびわれによる伸びを含むが、両端への主筋抜け出し分は含まない。詳細は付録1による。

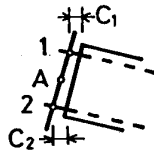


Fig. 5 Overall Crack

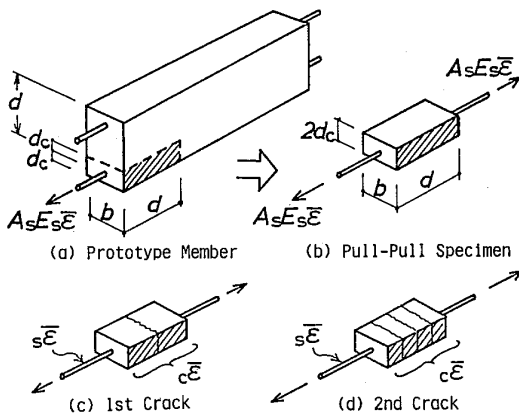


Fig. 6 Equivalent Pull-pull Specimen

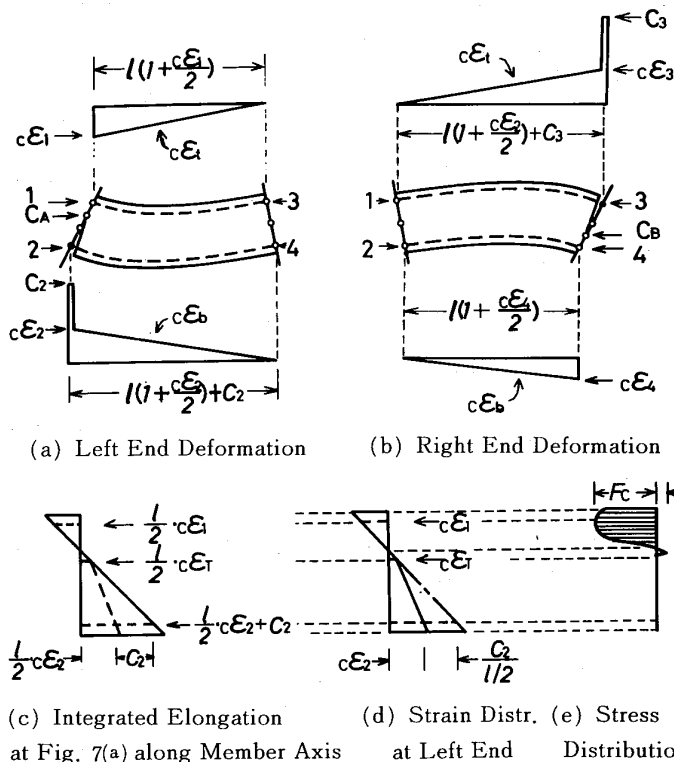


Fig. 7 Decomposition of Assumed Deformation, and Stress Distribution of Concrete at Member End

上記の仮定は、部材途中の曲げ変形分を評価する目的で設けた。付着剛性がゼロであれば、 $s\bar{\epsilon}$ が増しても  $c\bar{\epsilon}$ は増加せず、部材の変形は専ら部材端への主筋の抜け出しによって生じる。これは既往の実験結果<sup>(8)</sup>と対応する。逆に付着剛性を無限大にすれば、両引試験体モデルにおいて無数のひびわれが発生して  $c\bar{\epsilon}=s\bar{\epsilon}$ となるため、部材モデルにおいては抜け出しが生じず、主筋とコンクリートが一体となって変形することになる。

この仮定の手法は、谷・野村ら<sup>(9)</sup>の「有筋要素」という概念と類似であるが、本法では変形の仮定として使用したため、扱い方が少し異なる。

仮定(6)：ひびわれ面 (Fig. 4(b)の  $C_A-2'$  や  $3'-C_B$ ) は、変形後も平面を保つ。ただしひびわれ先端は、仮定(4)によって刻々移動する。

仮定(7)：コンクリートのひずみ度は、部材両端のひびわれを除き、材軸方向に直線的に変化する。例えば、上端筋位置のコンクリートひずみ度  $c\epsilon_A$  は、Fig. 4(a)のように分布する。一般に、上下主筋位置のコンクリートひずみ度  $c\epsilon_b$ ,  $c\epsilon_b$  は、部材端でのひびわれ分  $c_1 \sim c_4$  を含めて、

$$c\epsilon_t = \left(1 - \frac{x}{l}\right) c\epsilon_1 + \frac{x}{l} c\epsilon_3 + c_1 \delta(x) + c_3 \delta(l-x) \quad (12)$$

$$c\epsilon_b = \left(1 - \frac{x}{l}\right) c\epsilon_2 + \frac{x}{l} c\epsilon_4 + c_2 \delta(x) + c_4 \delta(l-x) \quad (13)$$

ただし、 $c\epsilon_1 \sim c\epsilon_4$  は部材両端の主筋位置でのコンクリートひずみ度、 $\delta(x)$  は Dirac のデルタ関数

とあらわす。主筋は式(12)(13)のようなコンクリートひずみ度の拘束を受けながら、適合条件式(10)と釣合条件式(11)を満たすように変形する。 $c\epsilon$ の直線分布仮定は、主筋位置だけでなく、部材内の任意の高さにおいて適用する。

仮定(8)：部材の曲率  $\kappa$  と材軸ひずみ度  $\epsilon_0$  は、上下主筋位置でのコンクリートひずみ度  $c\epsilon_b$ ,  $c\epsilon_b$  によって次のようにあらわされる。

$$\kappa = (c\epsilon_t - c\epsilon_b) / (2g) \quad (14)$$

$$\epsilon_0 = (c\epsilon_t + c\epsilon_b) / 2 \quad (15)$$

2g：上下主筋間の距離

ただし、 $c\epsilon_b$ ,  $c\epsilon_b$  は部材端のひびわれを含み、式(12)(13)であらわす。従って、ひびわれの分だけ部材端で折曲りが生じることになる。(以上、仮定おわり)

仮定(3)と仮定(7)から、部材端の断面内のコンクリートひずみ度分布に関する重要な性質が導かれる。Fig. 4(b)の部材左端の場合、下端筋位置のコンクリートひずみ度を  $c\epsilon_2$ 、ひびわれ幅を  $c_2$  として、

$$c\epsilon_2' = c\epsilon_2 + \frac{2c_2}{l} \quad (16)$$

という仮想的なひずみ度  $c\epsilon_2'$  を定義すると、Fig. 4(c-1)のように、 $c\epsilon_1$ ,  $c\epsilon_1$ ,  $c\epsilon_2'$  は一直線上に並ぶ。右端でも

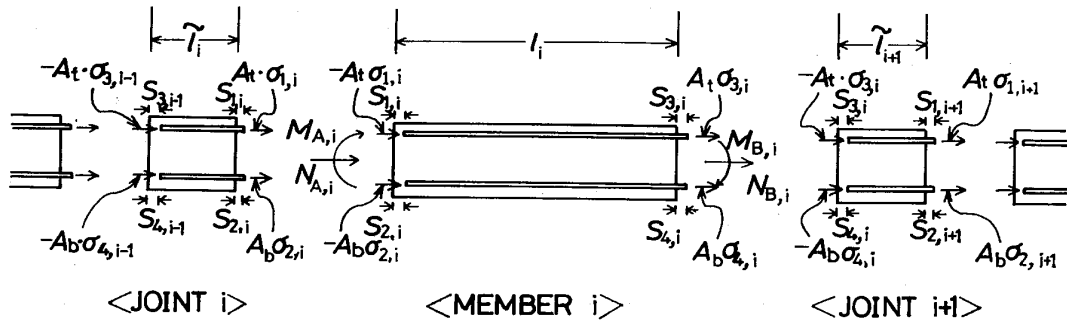


Fig. 8 Notation of Push-in and Pull-out from Joint and Inner Forces of Main Bars

同様である。

この理由は、微小変形を想定しているため、Fig. 4(b)の変形状態を Fig. 7(a)(b)のように分解することができるからである。Fig. 7(a)において、上端筋位置、ひびわれ先端、下端筋位置の部材全域での伸び量は、各々  $(l/2) \cdot c_{\epsilon 1}$ ,  $(l/2) \cdot c_{\epsilon T}$ ,  $(l/2) \cdot c_{\epsilon 2} + c_2$  である。接合部境界面は常に平面を保つから、これらの伸び量は、Fig. 7(c)のように一直線上に並ばなければならない。従って、 $c_{\epsilon 1}$ ,  $c_{\epsilon T}$ ,  $c_{\epsilon 2} + (2c_2)/l$  は Fig. 7(d)のように一直線上に並ぶ。

上記の性質を用いれば、部材左端の主筋位置でのコンクリートひずみ度とひびわれ幅から、部材左端の断面内のコンクリートひずみ度分布が定まり、コンクリートの応力度分布が Fig. 7(e)のように定まる。右端についても全く同様である。

部材両端のコンクリートひずみ度  $c_{\epsilon}$  の分布が Fig. 4 (c-1) (c-3) のように折曲り、部材途中では  $c_{\epsilon}$  が直線的に変化するから、部材途中の断面内の  $c_{\epsilon}$  の分布は、Fig. 4 (c-2) のように2つの折曲り点を持つ。つまり、部材端にひびわれが生じた後は、部材中のすべての断面で平面保持が成立しない。ひびわれがない時は平面保持が成立する。

§4. 剛性行列の構成

4-1 部材および接合部になされる仕事増分

まず、部材  $i$  に対してなされる仕事分  $\Delta W_i$  について考える。接合部境界面の回転角と軸方向変位が、部材変形ベクトルの成分であるから、仮に接合部からの主筋の抜け出しがまったく無いとすれば、

$$\Delta W_i = \mathbf{f}_i^T \cdot \Delta \mathbf{d}_i = M_A \Delta \theta_A + N_A \Delta e_A + M_B \Delta \theta_B + N_B \Delta e_B \quad (17)$$

となる。しかし、接合部からの抜け出し・押し込みがある場合には、Fig. 8を参照して、下式のようになる。

$$\Delta W_i = \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\sigma}_i^T \Delta \mathbf{s}_i = \left\{ \mathbf{f}_i^T \mid \boldsymbol{\sigma}_i^T \right\} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{s}_i \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma}_i = [-A_t \sigma_1, -A_b \sigma_2, A_t \sigma_3, A_b \sigma_4]^T$  (19)

$\mathbf{s}_i = [s_1, s_2, s_3, s_4]^T$  (20)

$A_b, A_t$  は上下主筋の断面積、 $\sigma_1 \sim \sigma_4, s_1 \sim s_4$  は接合部境界面での主筋応力度とすべり量とする。

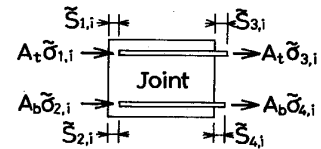


Fig. 9 Another Notation of Push-in and Pull-out around Joint

接合部  $i$  に対してなされる仕事増分  $\Delta \tilde{W}_i$  は、Fig. 8より、

$$\Delta \tilde{W}_i = -A_t \sigma_{3,i-1} \Delta s_{3,i-1} - A_b \sigma_{4,i-1} \Delta s_{4,i-1} + A_t \sigma_{1,i} \Delta s_{1,i} + A_b \sigma_{2,i} \Delta s_{2,i} \quad (21)$$

となる。または、Fig. 9のように接合部のみを取り出して記号を付け直し、次式であらわす。

$$\Delta \tilde{W}_i = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^T \Delta \tilde{\mathbf{s}}_i \quad (22)$$

ただし、

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = [-A_t \tilde{\sigma}_1, -A_b \tilde{\sigma}_2, A_t \tilde{\sigma}_3, A_b \tilde{\sigma}_4]^T \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_i = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4]^T \quad (24)$$

従って、部材の剛性行列は  $\{\mathbf{f}_i^T, \boldsymbol{\sigma}_i^T\}$  と  $\{\mathbf{d}_i^T, \mathbf{s}_i^T\}$  の間に、接合部の剛性行列は  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$  の  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  との間に導く。

4-2 接合部に関する剛性行列

接合部内の上端筋の付着に関する支配方程式（以下、付着基本式と呼ぶ）は次の4種である。

(1) 適合条件式……式(10)を  $x$  で微分し、 $c_{\epsilon} = 0$  を代入する。

$$ds/dx = s \epsilon \quad (25)$$

(2) 付着応力度のつり合い式

$$A_t \cdot d_s \sigma / dx = \phi_t \cdot \tau \quad (11)'$$

(3) 主筋の構成則（弾性）

$$s \sigma = E_s \cdot \epsilon \quad (26)$$

(4) 付着の構成則（弾性）

$$\tau = K \cdot s \quad (27)$$

これらを次に代入して、次式を得る。

$$d^2 s / dx^2 = \lambda_t^2 \cdot s \quad (28)$$

ただし、

$$\lambda_t^2 = \phi_t \cdot K / (A_t \cdot s E) \quad (29)$$

従って、

$$s = C_1 \sinh(\lambda_t \cdot x) + C_2 \cosh(\lambda_t \cdot x) \quad (30)$$

となる。 $C_1, C_2$  は積分定数で、すべりに関する境界条件

$$\left. \begin{aligned} & \bullet x=0 \text{ (接合部の左端) で } s=\tilde{s}_1 \\ & \bullet x=\tilde{l}_i \text{ (接合部の右端) で } s=\tilde{s}_3 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

より求める。さらに、 $ds/dx$ に関する境界条件、

$$\left. \begin{aligned} & \bullet x=0 \text{ で } ds/dx=\tilde{\sigma}_1/sE \\ & \bullet x=\tilde{l}_i \text{ で } ds/dx=\tilde{\sigma}_3/sE \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

を適用して、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} -A_t \tilde{\sigma}_1 \\ A_t \tilde{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{13} \\ sym & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= L_{33} = A_t \cdot sE \cdot \lambda_t \cdot C_t / S_t \\ L_{13} &= L_{31} = -A_t \cdot sE \cdot \lambda_t / S_t \\ C_t &= \cosh(\lambda_t \tilde{l}_i) \quad S_t = \sinh(\lambda_t \tilde{l}_i) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

下端筋に関しても同様の式を得る。これをまとめて、

$$\begin{bmatrix} -A_t \tilde{\sigma}_1 \\ -A_b \tilde{\sigma}_2 \\ A_t \tilde{\sigma}_3 \\ A_b \tilde{\sigma}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & L_{13} & 0 \\ & L_{22} & 0 & L_{24} \\ & & L_{33} & 0 \\ sym & & & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 \\ \tilde{s}_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

または、

$$\tilde{\sigma}_i = L_i \Delta \tilde{s}_i \quad (36)$$

とする。

### 4-3 部材に関する剛性行列

過程(1)：部材両端の主筋位置でのひびわれ幅・コンクリートひずみ度と、 $\{\sigma_i^T, s_i^T\}$ との関係を導く。具体的には、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ c_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_{11} & -N_{12} \\ N_{21} & -N_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} \sigma_i \\ s_i \end{bmatrix} \\ \varepsilon_i^T &= \{-c\varepsilon_1, -c\varepsilon_2, c\varepsilon_3, c\varepsilon_4\}_i \\ c_i^T &= \{-c_1, -c_2, c_3, c_4\}_i \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

を導く。

まず、上端筋に関して、

$$\Delta \begin{bmatrix} -c\varepsilon_1 \\ c\varepsilon_3 \\ -c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ R_{21} & -R_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} -A_t \sigma_1 \\ A_t \sigma_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

という行列を求める。

部材内の付着基本式は、適合条件式が、

$$ds/dx = s\varepsilon - c\varepsilon \quad (39)$$

となること以外は、4-2節の接合部と同じである。式(39), (11)', (26), (27), および仮定(7)より、式(28)と類似の

$$d^2 s/dx^2 = \lambda_t^2 \cdot s + (c\varepsilon_1 - c\varepsilon_3)/l_i \quad (40)$$

を得る。すべり量  $s$  と  $ds/dx$  に関する境界条件は、部材端のひびわれによるすべり量の不連続を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \text{部材左端で } s=s_1 - c_1, ds/dx = \sigma_1/E - c\varepsilon_1 \\ & \bullet \text{部材右端で } s=s_3 + c_3, ds/dx = \sigma_3/E - c\varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

である。従って、式(33), (34)と類似の式、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -A_t \sigma_1 \\ A_t \sigma_3 \end{bmatrix} - A_t \cdot sE \begin{bmatrix} -c\varepsilon_1 \\ c\varepsilon_3 \end{bmatrix} \\ &= A_1 \left( \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda_t^2 l} E \begin{bmatrix} -c\varepsilon_1 \\ c\varepsilon_3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = A_{22} = A_t \cdot sE \cdot \lambda_t \cdot C_t / S_t, \quad (43)$$

$$A_{12} = A_{21} = -A_t \cdot sE \cdot \lambda_t / S_t$$

$$C_t = \cosh(\lambda_t \cdot l_i) \quad S_t = \sinh(\lambda_t \cdot l_i)$$

を得る。上式を整理して、次式とする。

$$\begin{bmatrix} -c\varepsilon_1 \\ c\varepsilon_3 \end{bmatrix} = A_2^{-1} \begin{bmatrix} -A_t \sigma_1 \\ A_t \sigma_3 \end{bmatrix} - A_2^{-1} A_1 \left( \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) \quad (44)$$

$$A_2 = A_t \cdot sE \cdot I - \frac{1}{\lambda_t^2 l} A_1 \cdot E, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

部材両端でひびわれが生じていない場合は、 $c_1 = c_3 = 0$  であるから、式(38)と式(44)を比較して直ちに、

$$R_{11} = A_2^{-1}, \quad R_{12} = A_2^{-1} A_1, \quad R_{21} = R_{22} = 0 \quad (46)$$

を得る。逆に、部材両端でひびわれが生じている場合には、仮定(5)によって、部材端でのコンクリートひずみ度  $c\varepsilon_1, c\varepsilon_3$  と主筋ひずみ度  $\sigma_1/sE, \sigma_3/sE$  が関係づけられる。

これを増分形で、

$$\left. \begin{aligned} \Delta c\varepsilon_1 &= B_1 \cdot \Delta \sigma_1/sE, \quad \Delta c\varepsilon_3 = B_3 \cdot \Delta \sigma_3/sE \\ B_1, B_3 &: \text{Fig. 6(f)(g)の矢印のこう配の逆数} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

または次式であらわす。

$$\Delta \begin{bmatrix} -c\varepsilon_1 \\ c\varepsilon_3 \end{bmatrix} = B \Delta \begin{bmatrix} -A_t \sigma_1 \\ A_t \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{A_t \cdot sE} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

上式を式(44)に代入し、式(38)と比較して、

$$R_{11} = B, \quad R_{12} = 0,$$

$$R_{21} = A_1^{-1}(I - A_2 B), \quad R_{22} = I \quad (49)$$

を得る。部材の一端にのみひびわれが生じている場合も同様にして  $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$  を求める。

下端筋に関しても式(38)と同様の関係を求め、行列の要素を並べ直して、式(37)を得る。

過程(2)：部材変形ベクトル  $d_i$  と  $\sigma_i, s_i$  との関係。

§3の仮定(7)を仮定(8)によって、例えば  $\theta_A$  は、

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{3} \cdot \frac{-c\varepsilon_1 + c\varepsilon_2}{2g} \\ &+ \frac{l}{6} \cdot \frac{c\varepsilon_3 - c\varepsilon_4}{2g} + \frac{-c_1 + c_2}{2g} \end{aligned} \quad (50)$$

のように、 $\varepsilon_i$  と  $c_i$  から求まる。 $d_i$  の他の要素も同様である。従って、下記のような行列が書ける。

$$d_i = [H_1; H_2]_i \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \dots \\ c_i \end{bmatrix} \quad (51)$$

上式に式(37)を代入して、

$$\Delta d_i = [c_1; -c_2]_i \Delta \begin{bmatrix} \sigma_i \\ \dots \\ s_i \end{bmatrix} \quad (52)$$

と書く。

過程(3)：部材内力ベクトル  $f_i$  と  $\sigma_i, s_i$  との関係。

$f_i$  を、コンクリートの寄与分  $c f_i$  と主筋の寄与分  $s f_i$  に分解する。

$$f_i = c f_i + s f_i \quad (53)$$

$c f_i$  の計算は、Fig. 4(c-1)(c-3) に一点鎖線で示した仮想的なひずみ度分布で行う。同じ図の実線のひずみ度分布とはひびわれ部分で異なるが、 $c \epsilon > c \epsilon_T$  で応力ゼロとなるようなコンクリート構成則を使用すれば、問題はない。部材左端について説明する。仮想的なコンクリートひずみ度の曲率  $c \kappa_A$  と平均ひずみ度  $c \epsilon_{0A}$  を下式により定義する。

$$c \kappa_A = (-c \epsilon_1 + c \epsilon_2) / (2g) + (-c_1 + c_2) / (l \cdot g) \quad (54)$$

$$c \epsilon_{0A} = (c \epsilon_1 + c \epsilon_2) / 2 + (c_1 + c_2) / l \quad (55)$$

$c \kappa_A$ ,  $c \epsilon_{0A}$  に対して、部材内力のコンクリート負担分  $c M_A$ ,  $c N_A$  を計算すればよい。すなわち、平面保持解析と同様に、

$$\Delta \begin{Bmatrix} c M_A \\ c N_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_S c E y^2 dS & \int_S c E y dS \\ sym. & \int_S c E dS \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} -c \kappa_A \\ -c \epsilon_{0A} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

$y$  : 部材断面高さ方向の座標 (材軸で  $y=0$ )

$c E$  : コンクリートの瞬間剛性

$S$  : 部材端の断面 (ひびわれ面を含む)

とする。上式の積分計算は、断面を Fig. 10 のように分割し、各片中央のひずみ度に対して  $c E$  を評価して行く。結局、

$$\Delta c f_i = [Q_1 \quad Q_2]_i \Delta \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \dots \\ c_i \end{Bmatrix} \quad (57)$$

という行列が求まる。

主筋の寄与分  $s f_i$  は  $\sigma_i$  の一次結合で書ける。例えば、

$$s M_A = (-A_t \sigma_1 + A_b \sigma_2) \cdot g \quad (58)$$

である。これらをまとめて、

$$s f_i = G_i \sigma_i \quad (59)$$

と書く。

式 (37), (53), (57), (59) より、次式を得る。

$$\Delta f_i = \left( [Q_1 \quad Q_2]_i \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ \dots & \dots \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}_i + [G_1 \quad O]_i \right) \Delta \begin{Bmatrix} \sigma_i \\ \dots \\ s_i \end{Bmatrix} \quad (60)$$

または、

$$\Delta f_i = [E_1 \quad E_2]_i \Delta \begin{Bmatrix} \sigma_i \\ \dots \\ s_i \end{Bmatrix} \quad (61)$$

過程 (4) : 部材の剛性行列を導く。

式 (52) を  $\Delta \sigma_i$  に関して解いて、次式を得る。

$$\Delta \sigma_i = [C_1^{-1} \quad C_1^{-1} C_2]_i \Delta \begin{Bmatrix} d_i \\ \dots \\ s_i \end{Bmatrix} \quad (62)$$

上式を式 (61) に代入して、

$$\Delta f_i = [E_1 C_1^{-1} \quad E_1 C_1^{-1} C_2 + E_2]_i \Delta \begin{Bmatrix} d_i \\ \dots \\ s_i \end{Bmatrix} \quad (63)$$

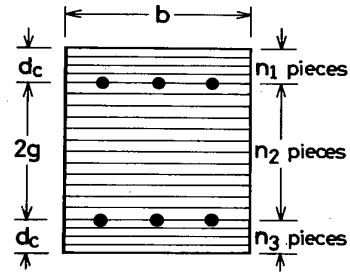


Fig. 10 Dividing of Member End Section

を得る。式 (62) と式 (63) を並べて、部材の剛性行列を得る。

$$\Delta \begin{Bmatrix} f_i \\ \sigma_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 C_1^{-1} & E_1 C_1^{-1} C_2 + E_2 \\ C_1^{-1} & c_1^{-1} c_2 \end{bmatrix}_i \Delta \begin{Bmatrix} d_i \\ s_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_i \Delta \begin{Bmatrix} d_i \\ s_i \end{Bmatrix} \quad (64)$$

剛性行列が非対称となるのは、§3 で変位関数を設定したのに、エネルギー原理を使用せず、内力のつりあいを部材端でのみ考慮することによって剛性行列を導いたからである。エネルギー原理を使用しなかった理由は、付録2で述べる。

#### 4-4 「部材群」の剛性行列

Fig. 11 のような、通し鉄筋によって結ばれた部材と接合部の集合体を「部材群」と呼ぶ。鉄筋連続法では、個別部材の剛性行列に  $\Delta \sigma_i$  と  $\Delta s_i$  の項が入るが、部材群についてまとめると、これらの項が消去されて通常の線材骨組としての取扱いが可能となる。

まず、部材群の両端に取りつく接合部の剛性行列を縮約する。通し鉄筋の鉄筋端では、鉄筋の応力またはすべり量について、次のうちどちらかの境界条件が与えられるはずである。

(1) 鉄筋がコンクリートの中に埋め込まれて終わっている場合 (鉄筋端が自由な場合)……鉄筋端の応力度ゼロ。

(2) 鉄筋端が鉄板などに溶接されて固定してある場合……鉄筋端のすべり量ゼロ

上記いずれかの境界条件により、式 (32) の剛性行列を縮約する。(Fig. 11 のような接合部数4個の部材群を考える。)

(a) 部材群の左端の接合部 ( $i=1$ )

$$\Delta \begin{Bmatrix} A_t \bar{\sigma}_3 \\ A_b \bar{\sigma}_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} L'_{11} & 0 \\ 0 & L'_{22} \end{bmatrix}_1 \Delta \begin{Bmatrix} \bar{s}_3 \\ \bar{s}_4 \end{Bmatrix}_1$$

$$\text{または } \Delta \bar{\sigma}'_1 = L'_1 \cdot \Delta s'_1 \quad (65)$$

(b) 部材群の右端の接合部 ( $i=4$ )

$$\Delta \begin{Bmatrix} -A_t \bar{\sigma}_1 \\ -A_b \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} L'_{11} & 0 \\ 0 & L'_{22} \end{bmatrix}_4 \Delta \begin{Bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \end{Bmatrix}_4$$

$$\text{または } \Delta \bar{\sigma}'_4 = L'_4 \cdot \Delta s'_4 \quad (66)$$

部材群両端と中間の接合部の剛性行列、式 (36), (65),

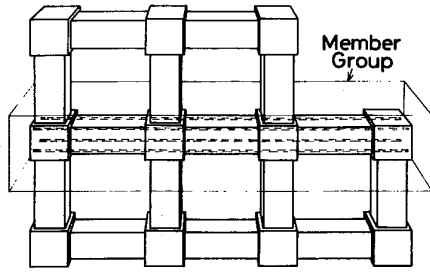


Fig. 11 Member Group and Frame

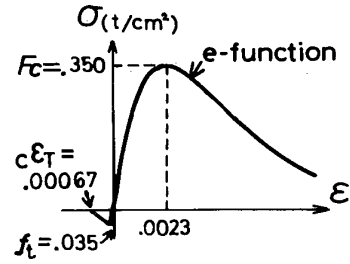


Fig. 12 Stress-Strain Model of Concrete

(66) を  $i=1, \dots, 4$  の順に並べる。

$$\Delta \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}'_1 \\ \tilde{\sigma}'_2 \\ \tilde{\sigma}'_3 \\ \tilde{\sigma}'_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & L_3 & \\ 0 & & & L'_4 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} \tilde{s}'_1 \\ \tilde{s}'_2 \\ \tilde{s}'_3 \\ \tilde{s}'_4 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

これを下式のようにあらわす。

$$\Delta \tilde{\sigma} = K_J \Delta \tilde{s} \quad (68)$$

部材の剛性行列, 式(64)も, 部材群についてまとめる。

$$\Delta \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11,1} & & & K_{12,1} & & \\ & K_{11,2} & & & K_{12,2} & \\ & & K_{11,3} & & & K_{12,3} \\ K_{21,1} & & & K_{22,1} & & \\ & K_{21,2} & & & K_{22,2} & \\ & & K_{21,3} & & & K_{22,3} \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} \quad (69)$$

または,

$$\Delta \begin{Bmatrix} f \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} d \\ s \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Fig. 8 と Fig. 9 との比較からわかるように,  $\sigma$  と  $\tilde{\sigma}$ ,  $s$  と  $\tilde{s}$  の間には次の関係がある。

- 力の釣合条件  $\sigma = -\tilde{\sigma}$
  - 適合条件  $s = \tilde{s}$
- (71)

従って, 式(68)を下記のように直す。

$$\Delta \sigma = -K_J \Delta s \quad (72)$$

上式を用いて式(70)を縮約し, 部材群の剛性行列を得る。

$$\Delta f = [K_{11} - K_{12}(K_J + K_{22})^{-1}K_{21}] \Delta d \equiv K \Delta d \quad (73)$$

### §5. 解析例

付着の有無をパラメータとした滝口<sup>(8)</sup>の逆対称曲げ実験のうち, せん断スパン比  $a/d=3$  で単調载荷した DC-3-O シリーズを選ぶ。試験体の断面と加力方法を Fig. 14 の下半分に示す。コンクリートの構成則は, 肋筋の内外を区別せず, Fig. 12 のようにした。すなわち, 圧縮側は梅村<sup>(10)</sup>の  $e$  関数モデルとした。引張側は, 割裂引張強度  $f_t=0.035 \text{ t/cm}^2$  まで弾性 ( $eE=260 \text{ t/cm}^2$ ) とし, それ以後  $-eE/4$  の負こう配とした。危険断面コンクリートの分割は, Fig. 10 で  $n_1=n_3=4$ ,  $n_2=12$  とした。鉄筋・付着は弾性とし, 鉄筋ひずみ度が降伏点に達したときに計算を打ち切った。滝口の試験体では, 部材両端に長さ 40 cm の主筋定着部があり, 危険断面へ

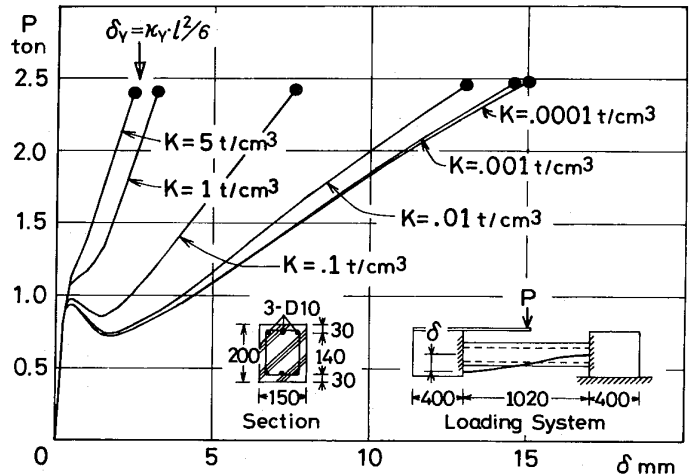


Fig. 13 Calculated Load Deflection without Pull-out from Stub

の抜け出し(押し込み)が生ずるが, これを無視した場合と考慮した場合について解析した。

定着部からの抜け出しを無視した, 部材内の付着剛性を  $K=5 \text{ t/cm}^3$  から  $0.0001 \text{ t/cm}^3$  まで変化させたときの荷重変形関係の解を, Fig. 13 に実線で示す。付着剛性を減らしてゆくと部材の降伏変形は増大したが,  $K=0.001 \text{ t/cm}^3$  の解と  $K=0.0001 \text{ t/cm}^3$  の解はほとんど一致した。平面保持解析による降伏時曲率  $\kappa_y$  から,  $\delta_y = \kappa_y \cdot l^2 / 6$  ( $l=1020 \text{ mm}$ ) として求めた降伏変形を同図中に矢印で示す。この降伏変形と  $K=5 \text{ t/cm}^3$  の降伏変形の値は極めて近い。 $K \geq 10 \text{ t/cm}^3$  の場合については, 数値計算上の不安定により, 解析できなかった。

次に, 定着部内の付着剛性を  $K_a=5 \text{ t/cm}^3$  とし, 部材内の付着剛性を  $K=5 \text{ t/cm}^3$  および  $K=0.0001 \text{ t/cm}^3$  としたときの荷重変形関係を Fig. 14 に実線で示す。同図には, 定着部からの抜け出しを無視した Fig. 13 の解を一点鎖線で示した。考慮した解の降伏変形は,  $K=5 \text{ t/cm}^3$  の解で約 1.3 cm,  $K=0.0001 \text{ t/cm}^3$  の解で約 2.5 cm 増大した。滝口<sup>(8)</sup>の実験結果を同図に破線で示す。付着の良い試験体の実験結果と,  $K=K_a=5 \text{ t/cm}^3$  の解とはよく一致した。付着の無い試験体の実験結果と,  $K=0.0001 \text{ t/cm}^3$ ,  $K_a=5 \text{ t/cm}^3$  の解も大むね一致した。

定着部からの抜け出しを考慮した Fig. 14 の実線の解で, 主筋が降伏する直前 ( $P \approx 2.4 \text{ t}$ ) の状態での, 主筋のすべり量, ひずみ度分布, および上端筋位置のコンクリートひずみ度分布を Fig. 15 に示す。 $K=0.0001$

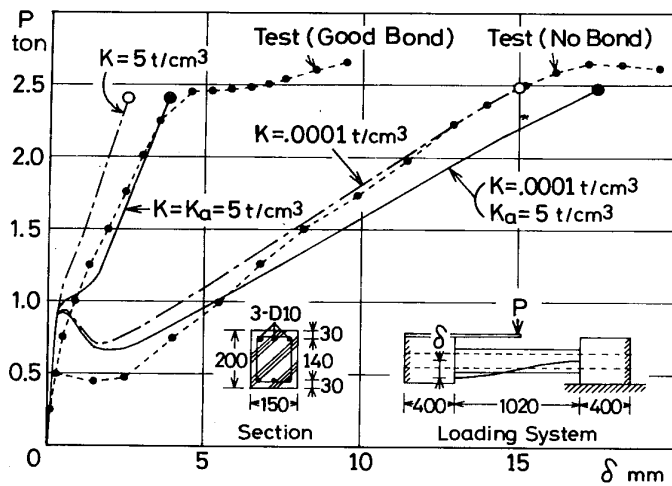


Fig. 14 Calculated Load-Deflection with Pull-out from Stub

$t/cm^3$  の解の部材中央部でのすべり量は、 $K=5 t/cm^3$  の解の約 70 倍となった。主筋のひずみ度分布については、実験結果を同図(b)に破線で示した。ただし実験結果は、付着の良い試験体で  $P=2.3 t$ 、付着の無い試験体で  $P=2.0 t$  のときの測定値であり、降伏直前の値ではない。付着の無い試験体では部材内の主筋ひずみ度がほぼ一様であり、 $K=0.0001 t/cm^3$  の解はこの様子をよく再現した。 $K=5 t/cm^3$  の解は、部材中央部近傍で付着の良いはりの実験値より引張側にずれる傾向を示した。これは本解析でコンクリートひずみ度を同図(c)のように直線分布と仮定したためである。 $K=5 t/cm^3$  の解で、部材右端のコンクリートの引張ひずみ度が  $K=0.0001 t/cm^3$  の解より大きいのは、仮定(6)の影響である。逆に  $K=0.0001 t/cm^3$  の解で、部材左端のコンクリートの圧縮ひずみ度が  $K=5 t/cm^3$  の解より大きいのは、 $K=0.0001 t/cm^3$  の解で主筋が圧縮力を負担しないからである。

§6. まとめ

付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の解析法として、「鉄筋連続法」を提案し、鉄筋・付着とも弾性的の場合について式の展開を行った。解析仮定は、

- 断面モーメント・軸力と部材内力とのつりあいは、部材両端でのみ考慮する、
  - 部材内のコンクリートのひずみ度は材軸方向に直線的に変化し、鉄筋の抜け出しは部材端に集中する、
  - 部材変形の自由度は、
  - 部材両端の回転・軸方向変形
  - 部材両端の接合部からの、上下主筋の抜け出し量
- という、合計 8 個とした。

付着剛性をパラメータとした逆対称曲げ部材の解析を行い、既応の実験結果と比較して解析法の適用性を調べた。

謝辞 本報は筆者が東京大学大学院在学中に行った研究の一部をまとめたものである。東京大学教授・工

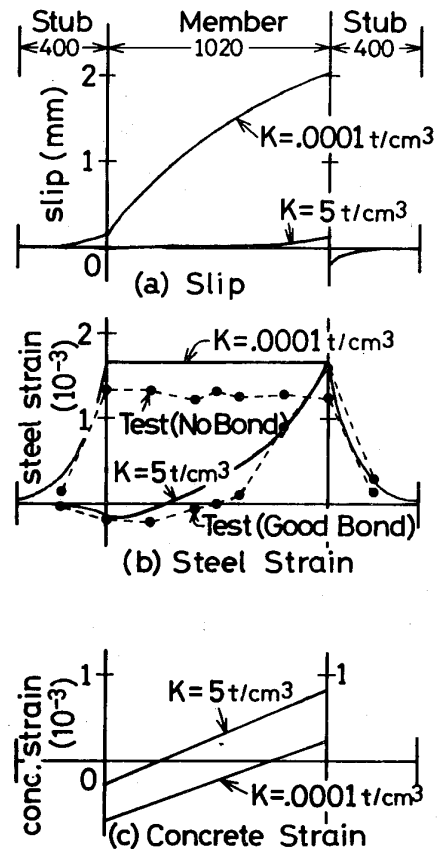


Fig. 15 Calculated Distribution of Slip and Strain along Top Bar just before Yielding ( $P=2.4 t$ )

博 青山博之先生には、解析法の発想の段階から本報のとりまとめに至るすべての段階で懇切なる御指導を賜わり、数多くの重要な示唆を頂いた。同助教授・工博 小谷俊介先生にも全面的な御指導を賜わり、特に§3と§4に関する示唆を頂戴した。同教授・工博 岡田恒男先生にも§4に関する示唆を頂いた。東京大学大学院生 加藤大介氏、日建設計 白石俊彦氏には、当時卒業生としてプログラム作成に御助力を頂いた。横浜国立大学助手 壁谷沢寿海氏、東京大学大学院生 鈴木紀雄氏、名古屋工業大学助教授・工博 滝口克己先生にも、御指導・御助力を賜わった。名古屋工業大学卒業生、今村、大川、神沢、小俣、森本、横井、吉井の各氏には図面作成に御協力を頂いた。記して感謝します。

付録1. 仮定(5)に関する補足説明……両引試験体モデルによる、ひびわれ面での主筋ひずみ度とコンクリートひずみ度との関連づけ

両引試験体の材料モデルを次のように仮定する。

- 鉄筋と付着は、剛性  $E$ 、 $K$  の弾性とする。(部材と同じ)
- コンクリートはひびわれ強度  $f_t$  まで弾性剛性  $E$  で進み、 $f_t$  に達するとひびわれ、すなわち変位の不連続が生じて応力を解放する。

応力のつりあいとひずみ度の変化は、鉄筋軸方向でのみ考慮する。すなわち次元問題として扱う。

上記の仮定によれば、両引試験体モデルのひびわれは、Fig. 6(c)のように1回目は中央に発生し、2回目には4等分点に、 $n$  回目には  $2^n$  等分点に発生する。 $n$  回目のひびわれ発生直前の状



態を考えると、両引試験体は $2^{n-1}-1$ 個のコンクリート片に分割され、各片中央のコンクリートひずみ度は $c\epsilon = f_i/cE$ （ひびわれ直前）であり、ひびわれ位置では $c\epsilon = 0$ である。この条件のもとに、福田<sup>(11)</sup>によって導かれた下式を解く。

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = \beta^2 s, \quad \beta^2 = \phi K \left( \frac{1}{sA \cdot sE} + \frac{1}{cA \cdot cE} \right) \quad (74)$$

ただし  $cA = 2 d_c \cdot b - sA$  : コンクリートの断面積

その結果、 $n$  回目のひびわれ発生直前の、ひびわれを含むコンクリートの平均ひずみ度  $c\bar{\epsilon}_n$  と両端の鉄筋のひずみ度  $s\bar{\epsilon}_n$  が下式のように求まる。

$$c\bar{\epsilon}_n = \frac{f_i/cE}{1-1/\cosh \gamma_n} \left[ 1 + \frac{q \cdot \tanh \gamma_n}{\gamma_n} + \frac{(1+q)\tanh \gamma_n}{\beta d} \right] \quad (75)$$

$$s\bar{\epsilon}_n = \frac{f_i/cE}{1-1/\cosh \gamma_n} (1+q)$$

$$\gamma_n = 2^{-n+1} \beta d, \quad q = cA \cdot cE / (sA \cdot sE)$$

$n=1, 2, \dots$  について上式を計算すると Fig. 16(a) の白丸印のような点が求まる。そして材料特性が弾性であることを考慮すると、 $c\bar{\epsilon}$  と  $s\bar{\epsilon}$  との関係は Fig. 16(a) の実線のような稲妻状の折線となる。このままでは複雑なので、同じ図中の破線のように折線のピークを結ぶことにし、もとの部材モデルのひびわれ面での主筋のひずみ度とコンクリートのひずみ度とは、Fig. 16(a) の破線で関係づけられるものとする。

上記の仮定は部材のひびわれ面にのみ適用するのであって、部材にひびわれが生じるまでは鉄筋とコンクリートのひずみ度は独立の値を取りうる。そこで、部材のひびわれ発生直後の主筋とコンクリートのひずみ度が、Fig. 16(a) の Case 1 や Case 2 の二重丸のような位置にあらわれた場合、両者の関係は同図中の矢印のように右上のピークを目指して進むものとする。

除荷時 ( $s\bar{\epsilon}$  が減少するとき) には、 $s\bar{\epsilon}$  と  $c\bar{\epsilon}$  の関係は Fig. 16(b) のように原点を目指して進むが、 $c\epsilon_T$  に達しても部材端のひびわれが閉じない場合は、 $s\bar{\epsilon}$  のみが減少するものとする。これは仮定 (4) に抵触しないための条件である。

付録 2. Ritz 法による剛性行列の定式化とその問題点

本文中では、断面内力のつりあいを部材両端のみで考慮 [§ 3 の仮定(1)] することによって剛性行列を導いた。これは、変位関数を仮定する微分方程式の数値解法のうち、選点法 (Collocation Method) に分類される。別の方法として、§ 3 の仮定 (1) のかわりに、Potential Energy 停留条件を用いる Ritz 法 (または Rayleigh-Ritz 法) も可能である。この方法では対称な剛性行列が得られる。

鉄筋連続法では付着すべりを考慮しているため、部材  $i$  の中に蓄えられるひずみエネルギー増分  $\Delta U_i$  は、コンクリート・主筋・付着のひずみエネルギー増分、 $\Delta_c U_i$ 、 $\Delta_s U_i$ 、 $\Delta_b U_i$  の和として与えられる。

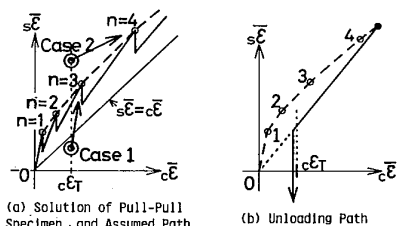


Fig. 16 Relation between Steel and Concrete Strain after Crack

$$\Delta U_i = \Delta_c U_i + \Delta_s U_i + \Delta_b U_i$$

$$= \int_V c\sigma \Delta c\epsilon \, dV + \int_V s\sigma \Delta s\epsilon \, dV + \int_V \tau \Delta s \, dV \quad (76)$$

上式のうち  $c\epsilon$ 、 $s\epsilon$ 、 $s$  は、§ 3 の仮定 (2) から (7)、および付着基本式を解くことにより、 $\{\sigma_i^T, s_i^T\}^T$  (以降、 $\nu_i$  と書く) の関数としてあらわされる。これを増分形で、

$$\Delta c\epsilon = cB \Delta \nu_i, \quad \Delta s\epsilon = sB \Delta \nu_i, \quad \Delta s = sB \Delta \nu_i \quad (77)$$

ただし  $cB$ 、 $sB$ 、 $sB$  は行ベクトルで、部材の変形状態と部材中の位置 ( $x$ ,  $y$ ) の関数。

と書く。式 (76) と (77) から、

$$\frac{\partial (\Delta U_i)}{\partial \nu_i^T} = \frac{\partial}{\partial \nu_i^T} \int_V c\sigma \Delta c\epsilon \, dV + \frac{\partial}{\partial \nu_i^T} \int_V s\sigma \Delta s\epsilon \, dV + \frac{\partial}{\partial \nu_i^T} \int_V \tau \Delta s \, dV$$

$$= \int_V \left( \frac{\partial c\epsilon}{\partial \nu_i} \right)^T \cdot \frac{d c\sigma}{d c\epsilon} \cdot \frac{\partial c\epsilon}{\partial \nu_i} \, dV \Delta \nu_i + \int_V \left( \frac{\partial s\epsilon}{\partial \nu_i} \right)^T \cdot \frac{d s\sigma}{d s\epsilon} \cdot \frac{\partial s\epsilon}{\partial \nu_i} \, dV \Delta \nu_i$$

$$+ \int_V \left( \frac{\partial s}{\partial \nu_i} \right)^T \cdot \frac{d \tau}{d s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \nu_i} \, dV \Delta \nu_i$$

$$= \int_V [cB^T cE cB + sB^T sE sB + sB^T K_B B] \, dV \cdot \Delta \nu_i$$

$$\equiv U_i \Delta \nu_i \quad (78)$$

という対称行列  $U_i$  を書くことができる。

ポテンシャルエネルギー停留条件とは、

$$\Delta \lambda_i = \partial (\Delta U_i) / \partial \mu_i^T \quad (79)$$

$$\text{ただし、} \lambda_i = \begin{Bmatrix} f_i \\ \sigma_i \end{Bmatrix}, \quad \mu_i = \begin{Bmatrix} d \\ s \end{Bmatrix}$$

である。式 (78) を利用して式 (79) を変形する。

$$\Delta \lambda_i = \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial \mu_i} \right)^T \frac{\partial (\Delta U_i)}{\partial \nu_i^T} = \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial \mu_i} \right)^T \cdot U_i \cdot \Delta \nu_i$$

$$= \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial \mu_i} \right)^T \cdot U_i \cdot \left( \frac{\partial \nu_i}{\partial \mu_i} \right) \cdot \Delta \mu_i \quad (80)$$

一方、式 (62) より、

$$\Delta \nu_i = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & C_1^{-1} C_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}_i \Delta \mu_i \quad (81)$$

となるから、結局、下式の剛性行列を得る。

$$\Delta \lambda_i = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & C_1^{-1} C_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}_i^T U_i \begin{pmatrix} C_1^{-1} & C_1^{-1} C_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}_i \Delta \mu_i \quad (82)$$

上式では、 $U_i$  を求めるために式 (78) の定義に従ってコンクリートの剛性  $cE$  の分布を仮定する必要があり、複雑である。さらにこの方法では、断面モーメント・軸力と部材内力との釣合が部材両端で保証されないから、部材の崩壊荷重を正確に知り得ないという欠陥を持つ。

後者の欠陥について、Fig. 17(a) の変断面材を例題として説明する。断面の軸方向ひずみに関する特性は、 $x=L/2$  を境にして Fig. 17(b) のように剛性、耐力とも 2 倍になるものとする。この変断面材の  $x=L$ 、 $L/2$  における外力 ( $P_1$ ,  $P_2$ ) と変位 ( $u_1$ ,  $u_2$ ) との関係について、正解、選点法の解、Ritz 法の解を比較する。

まず正解を示す。非線形時を含む柔性行列は、

$$\Delta \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 1/K_1 + 1/K_2 & 1/K_2 \\ 1/K_2 & 1/K_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (83)$$

ただし、 $K_1$ 、 $K_2$  は、 $L/2 \leq x \leq L$ 、 $0 \leq x < L/2$  での瞬間剛性とする。

である。弾性範囲内で  $P_1$  または  $P_2$  のみを加えたときのひずみ度分布を Fig. 18 に実線で示す。降伏荷重と降伏変位は、 $P_1$  のみのとき  $P_1 = P_0$ 、 $u_1 = 0.75 \cdot L \cdot \epsilon_y$ 、 $P_2$  のみのとき  $P_2 = 2 P_0$ 、 $u_2 = 0.50 \epsilon_y$  である。降伏時の値で基準化した荷重・変位関係を Fig. 19 に実線で示す。

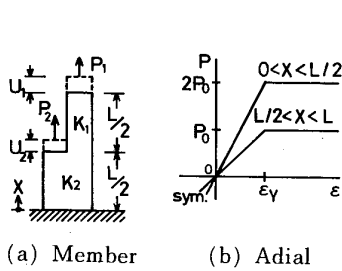


Fig. 17 Explanatory Problem

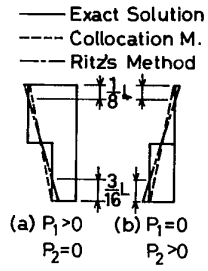


Fig. 18 Strain Distribution

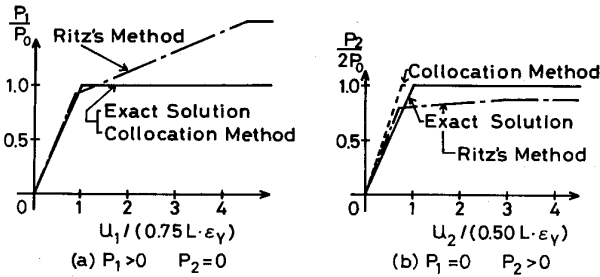


Fig. 19 Calculated Load-Displacement Relationship

選点法と Ritz 法では、変位関数としてひずみの直線分布を仮定する。選点法では部材上端と下端で力のつりあいを考慮する。Ritz 法では、断面剛性が  $0 \leq x < L/2$ ,  $L/2 \leq x \leq L$  で区分的に一樣とし、それぞれ部材下端と上端のひずみ度から評価した剛性を用いる。選点法の柔性は、

$$\Delta \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{8} \begin{bmatrix} 4/K_1 + 4/K_2 & 4/K_2 \\ 1/K_1 + 3/K_2 & 3/K_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

と、非対称になる。Ritz 法では、

$$\Delta \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{2(K_1^2 + 14 K_1 K_2 + K_2^2)} \begin{bmatrix} 16 K_1 + 16 K_2 & 14 K_1 + 2 K_2 \\ 14 K_1 + 2 K_2 & 13 K_1 + K_2 \end{bmatrix} \Delta \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (85)$$

と、対称になる。選点法と Ritz 法による弾性時のひずみ度分布を、Fig. 18 に破線と一点鎖線で示す。選点法と正解のひずみ度分布は、部材の上端と下端で一致し、Ritz 法と正解のひずみ度分布は部材途中で一致する。

次に、 $P_1$  または  $P_2$  のみを加えたときの荷重変位関係の解を Fig. 19 に示す。選点法（破線）では、 $P_1$  を加えたときの解は正解と完全に一致する。 $P_2$  を加えたときは初期剛性が正解より高いが、降伏荷重は一致する。これに比べ、Ritz 法（一点鎖線）では部材の一端が降伏してもなお荷重が増大し、正確な降伏荷重を知ることができない。

参考文献

- 1) 東 洋一：「鉄筋コンクリート柱の崩壊防止に関する総合研究の現況について」コンクリート工学, Vol.13, No. 1, 1975 年 1 月, pp. 2-18
- 2) 小倉弘一郎, 関根正孝：「鉄筋コンクリート柱・はり接合部に関する研究の動向」コンクリート工学, Vol.19, No. 9, 1981 年 9 月, pp. 3-15
- 3) 構造標準委員会・鉄筋コンクリート第 3 小委員会：「鉄筋コンクリート終局強度設計に関する資料 シリーズ 12 付着特性 (2)」建築雑誌, Vol. 95, No. 1159, 1980 年 1 月, pp. 61-62
- 4) 野口 博・長沼一洋：「鉄筋コンクリート柱はり接合部の非線形有限要素解析 (第 1 報) (第 2 報)」日本建築学会関東支部研究報告集, 1981 年, pp. 153-160

- 5) 多田利正・武田寿一：「鉄筋コンクリート部材における材端塑性ヒンジの変形特性と隣接定着域の付着劣化過程に関する解析的研究 (その 1, その 2, その 3)」日本建築学会関東支部研究報告集, 1980 年, pp. 125-136
- 6) 青山博之・市之瀬敏勝：「鉄筋の連続性を考慮した鉄筋コンクリート造長方形骨組の非線形解析 (その 1)」日本建築学会関東支部研究報告集, 1978 年 7 月, pp. 205-208
- 7) 市之瀬敏勝：「付着特性を考慮した鉄筋コンクリート骨組の復元力特性に関する研究」東京大学学位論文, 1981 年 12 月
- 8) 滝口克己：「付着のある RC 部材と付着のない RC 部材の変形特性・II」日本建築学会論文集告集, No. 262, 1977 年 12 月, pp. 53-60
- 9) 谷 資信・野村設郎・永坂具也・平松 晃：「鉄筋コンクリート耐震要素の復元力特性 (その 4)」日本建築学会論文報告集, No. 262, 1977 年 12 月, pp. 61-72
- 10) 梅村 魁：「鋼筋コンクリート梁の塑性変形及び終局強度」日本建築学会論文報告集, No. 42, 1951 年 2 月, pp. 59-70
- 11) 福田武雄：「軸方向力を受くる鉄筋コンクリート部材に於ける応力の分布に関する二三の理論的問題に就て」土木学会誌, Vol. 19, No. 3, 1933 年

## SYNOPSIS

UDC : 693.554 : 624.02

### ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE FRAMES WITH BOND-SLIP

—When steel and bond be elastic—

by TOSHIKATSU ICHINOSE,  
Member of A. I. J.

In order to withstand the greatest likely earthquake, building frames without shear walls should have adequate ductility, which is defined as energy dissipating capacity and bearing capacity to lateral load after reversals. It has been pointed out by many experimental studies that bond failure either in member or in beam-column joint degrades much of ductility of structural frame.

The objective of this study is to propose a relatively simple method of frame analysis considering bond-slip characteristics. This method is essentially one dimensional. Uniaxial constitutive models of steel, concrete, and bond are utilized. Steel and bond were assumed to be linearly elastic in this paper. Equilibrium between bond stress and steel stress is satisfied all along the main bars, passing through the members and joints. Equilibrium between inner forces of a member (moments and axial forces) and the axial stress in a section is satisfied only at both ends of the member. Degrees of freedom of a member are limited as eight, which are

- ( 1 ) rotation and axial deformation at both ends of the member ( 4 DOF), and
- ( 2 ) pull-out (or push-in) of top and bottom bars from adjoining joints ( 4 DOF).

The concrete in a beam-column joint is assumed as rigid (shear deformation is ignored), and only the axial strain and slip of main bars are assumed to occur in the joint.

The anti-symmetrically loaded beams were analyzed, where the parameters were ( 1 ) bond-slip stiffness, and ( 2 ) with or without pull-out of main bars from adjoining joints. Analytical results were compared with experimental results.

---

Research Associate, Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.