

## 脆性材料中の補強材のまわりの 内部ひびわれに関する一考察

Analysis of internal cracks around reinforcement in brittle materials

小畑 誠\* 後藤芳顕\*\* 松浦 聖\*\*\*  
Makoto Obata, Yoshiaki Goto, Sei Matsuura

Bond between reinforcement and matrix is one of the most important factors on mechanical properties of reinforced composites. When reinforcement has lugs on its surface, bond is caused mainly by interlocking with matrix. Hence, internal cracking inevitably involves the characteristics of bond. In the present study, analysis of these internal cracks around reinforcement is focused on with the aids of two dimensional elasticity. Parametric study of stress intensity factors explains the observed cracking pattern fairly well.

### 1. はじめに

棒状の補強材を持つ複合材料, 例えば鉄筋コンクリートなどにおいては, 補強材とそれを取りかこむマトリクスとの付着性状が, 全体の力学的性質にとりわけ大きな影響を及ぼすことが知られている。これらの付着は, 表面における粘着力, マサツ力, そして表面の凹凸によるマトリクスとの機械的なかみ合いによって起こる。鉄筋コンクリートにおいて行われた, 広範囲な数多くの実験的研究<sup>1~3)</sup>によれば, これらの付着は表面に凹凸のある場合には, この凹凸によるかみ合いによるところが最も大きく, 又その機械的性質は, これらのふしの高さと同隔の比によってよく整理されることが明らかになった。したがってこれらの付着のメカニズムには, まわりの脆性なマトリクスへのひびわれの進展が必然的に関与してくることが予想される。実際に, 鉄筋コンクリートにおいては, 後藤<sup>4)</sup>がインク注入法を用いて, 異型鉄筋のまわりにそのふしから内部ひびわれが発生していることを明らかにし, 付着の最終的な挙動にこれらの内部ひびわれが重要な役割をはたしていることを強く暗示した。

この問題に関しては, 現在に至るまで, 特にコンクリートの分野において非常に数多くの解析的そして実験的研究が行なわれてきているが, これらの大部分は, 主として有限要素法への応用の立場から荷重—すべり変位特性に注目したものである。<sup>5~8)</sup> (8) に要約したレビューがある。) その一方で, 後藤が示した

---

*	Ph.D.	名古屋工業大学助手	工学部社会開発工学科	(〒466名古屋市中区御器所町)
**	工博	名古屋工業大学助教授	工学部社会開発工学科	(〒466名古屋市中区御器所町)
***	工博	名古屋工業大学教授	工学部社会開発工学科	(〒466名古屋市中区御器所町)

内部ひびわれそのものに対する解析的な研究にはIngraffea<sup>9)</sup>らの研究があるが、その数は非常に限られていると言っても過言ではない。

本研究はこれら脆性マトリクス中に起こる内部ひびわれを二次元弾性論にもとづいて解析するものである。付着の性状が主としてふしの高さと同隔によって支配されるという実験的報告をもとに、ふしによる補強材とマトリクスとの間の応力伝達を周期的に配置した剛体板によって近似するモデルを提案した。発生したひびわれの解析にはLo<sup>10)</sup>のいわゆるGreen関数による定式化を用い、剛な板と各々のひびわれの間の相互作用は、堀井-Nemat-Nasser<sup>11)</sup>による重ねあわせの方法によって考慮した。さらに結果として得られる特異積分方程式を数値的に解いて内部ひびわれ先端での応力拡大係数を求め、ひびわれ進展の様子を考察する。

## 2. 定式化

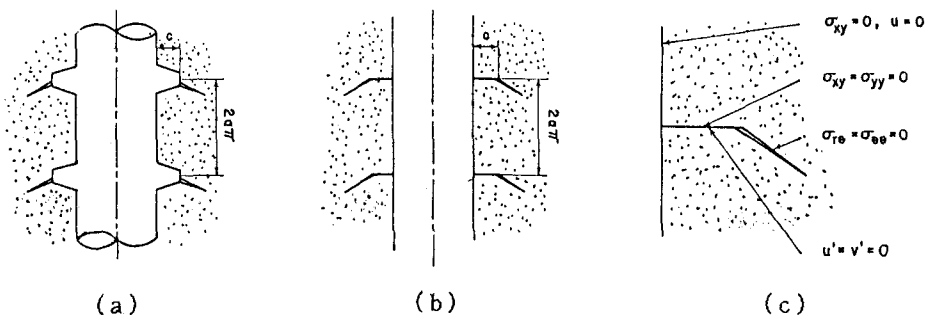


図 1 解析モデル

実験的観察によれば、ふしを持つ補強材はすべりに対してマトリクスとの機械的な噛み合いによって抵抗し、これによる付着性状はふしの高さと同隔の比( $2a\pi/c$ )に最も大きく依存している。ここでは簡便のため図1(a)に対し、図1(b)に示すような2次元平面解析モデルを用いる。ここで、棒表面でのマサツがふしとマトリクスとの機械的な噛み合いの影響に比して非常に小さいことを考え、棒表面での境界条件として図1(c)に示すように与えると、これは明らかに解析モデルとしては図2の様に無限平面上に周期的に配置された、剛体板の積み重ねによってあたえられるものと同様になる。この境界条件のもとでは、応力は必然的に剛体板の先端で特異性をもち、したがってひびわれがそこからマトリクスへと進展していくことが予想される。以下では長さの量に関しては剛体板の長さの半分( $c$ )で無次元化されているものとし、代表的な剛体板は図2に示されるように $x$ 軸上  $(-1, 0)$  から  $(1, 0)$  にあるものとする。

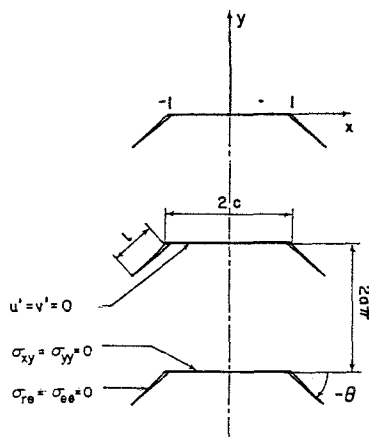


図 2 境界条件

Muskhelishviliの複素ポテンシャル<sup>12)</sup>を用いて、応力及び変位場は、次のようにあたえられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{yx} &= 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数を、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  方向の変位を表す。 $\mu$  は剪断弾性係数、 $\nu$  はポア

ソン比とし、平面歪問題に関しては、 $\kappa = 3 - 4\nu$ であって、平面応力問題に関しては $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ である。また左辺中のプライム(')は $x$ に関する微分を表すものとする。次式で定義される補助関数 $\Omega(z)$ を式(1)に用いれば、

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}$$

以下の解析に適した次の表現を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - i\sigma_{yx} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}\end{aligned}\quad (2)$$

図2に示されている境界条件を書き下すと次のようになる。

$$2\mu(u' + iv')^- = 0, \quad (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})^+ = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

上式中で、 $+$ と $-$ はそれぞれ剛体板の上面及び下面を表す。

各剛体板と各ひびわれの相互作用を取り入れるために堀井とNemat-Nasser<sup>11)</sup>によって提案された、重ね合わせの方法をここでは用いる。本問題は線形であるから、式(3)<sub>1, 2</sub>であたえられる境界条件は次のよう分解することができる。

$$\begin{aligned}2\mu(u' + iv')_{\text{DP}}^- + 2\mu(u' + iv')_{\text{DS}}^- + 2\mu(u' + iv')_{\text{P}}^- + 2\mu(u' + iv')_{\text{I}}^- + 2\mu(u' + iv')_{\text{Z}}^- &= 0 \\ (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{\text{DP}}^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{\text{DS}}^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{\text{P}}^+ \\ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{\text{I}}^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{\text{Z}}^+ &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

添字の定義については以下の解析で明らかにする。同様にポテンシャル関数も分解して次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi_{\text{DP}}(z) + \Phi_{\text{DS}}(z) + \Phi_{\text{P}}(z) + \Phi_{\text{I}}(z) + \Phi_{\text{Z}}(z) \\ \Omega(z) &= \Omega_{\text{DP}}(z) + \Omega_{\text{DS}}(z) + \Omega_{\text{P}}(z) + \Omega_{\text{I}}(z) + \Omega_{\text{Z}}(z)\end{aligned}\quad (5)$$

$\Phi_{\text{DP}}(z)$ と $\Omega_{\text{DP}}(z)$ は $z_0$ と $-\bar{z}_0$ に位置する転位によるポテンシャルを表し次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{DP}}(z) &= \frac{\alpha}{z - z_0} - \frac{\bar{\alpha}}{z + \bar{z}_0} \\ \Omega_{\text{DP}}(z) &= - \left\{ \frac{1}{z + z_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{z + \bar{z}_0}{(z + z_0)^2} \right\} \alpha + \left\{ \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z + z_0} - \frac{z - z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right\} \bar{\alpha}\end{aligned}\quad (6)$$

ここに $\alpha$ は転位の強さを表し次のように定義される。

$$\alpha = \frac{\mu e^{i\theta}}{\pi i(\kappa + 1)} ([u_r] + i[u_\theta]) \quad (7)$$

$[u_r]$ と $[u_\theta]$ は、それぞれ転位線を越えての $r$ 方向、 $\theta$ 方向の変位の不連続量をあらわす。重ね合わせの原理より上の転位以外のすべての転位によるポテンシャル関数 $\Phi_{\text{DS}}(z)$ と $\Omega_{\text{DS}}(z)$ は次式で表されることになる。

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{DS}}(z) &= \sum_{\ell \neq 0} \Phi_{\text{DP}}(z + 2a\ell\pi i) = \alpha f_1(z - z_0) - \bar{\alpha} f_1(z + \bar{z}_0) \\ \Omega_{\text{DS}}(z) &= \sum_{\ell \neq 0} \Omega_{\text{DP}}(z + 2a\ell\pi i) - \sum_{\ell \neq 0} 4a\pi i \overline{\Phi_{\text{DP}}'(z + 2a\ell\pi i)} \\ &= -\alpha \{2f_1(z + z_0) - f_1(z - \bar{z}_0) - (z + z_0 + z + \bar{z}_0)f_2(z + z_0)\} \\ &\quad + \bar{\alpha} \{2f_1(z - \bar{z}_0) - f_1(z + z_0) - (z - \bar{z}_0 + z - z_0)f_2(z - \bar{z}_0)\}\end{aligned}\quad (8)$$

$f(z)$ の定義については補遺(a)を参照。

式(5)に戻り、ポテンシャル関数 $\Phi_{\text{P}}(z)$ と $\Omega_{\text{P}}(z)$ を次の境界値問題の解として与える。

$$2\mu(u' + iv')_{\text{DP}}^- + 2\mu(u' + iv')_{\text{P}}^- = 0, \quad (\sigma_{yy} + i\sigma_{yx})_{\text{DP}}^+ + (\sigma_{yy} + i\sigma_{yx})_{\text{P}}^+ = 0 \quad (9)$$

具体的には次のようになる。

$$\begin{aligned}\Phi_p(z, z_0) = & -\frac{\alpha}{2} \left[ \{F_0(z, z_0) + F_1(z, z_0)\} - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \{F_0(z, \bar{z}_0) - F_1(z, \bar{z}_0)\} \right. \\ & - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} (\bar{z}_0 - z_0) \{G_0(z, -z_0) - G_1(z, -z_0)\} \left. \right] \\ & + \frac{\bar{\alpha}}{2} \left[ \{F_0(z, -\bar{z}_0) + F_1(z, -\bar{z}_0)\} - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \{F_0(z, -z_0) - F_1(z, -z_0)\} \right. \\ & - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} (\bar{z}_0 - z_0) \{G_0(z, \bar{z}_0) - G_1(z, \bar{z}_0)\} \left. \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_p(z, z_0) = & -\frac{\alpha}{2} \left[ i\sqrt{\kappa} \{F_0(z, z_0) - F_1(z, z_0)\} + \{F_0(z, \bar{z}_0) + F_1(z, \bar{z}_0)\} \right. \\ & + (\bar{z}_0 - z_0) \{G_0(z, -z_0) - G_1(z, -z_0)\} \left. \right] \\ & + \frac{\bar{\alpha}}{2} \left[ i\sqrt{\kappa} \{F_0(z, -\bar{z}_0) - F_1(z, -\bar{z}_0)\} + \{F_0(z, -z_0) + F_1(z, -z_0)\} \right. \\ & + (\bar{z}_0 - z_0) \{G_0(z, \bar{z}_0) - G_1(z, \bar{z}_0)\} \left. \right]\end{aligned}$$

$$F_1(z, \xi) = \{1 - X_1(z)/X_1(\xi)\} / (z - \xi), \quad G_1(z, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} F_1(z, \xi)$$

$$X_1(z) = (z + 1)^{-r_1} (z - 1)^{r_1 - 1}$$

$$r_0 = 3/4 + (\log \kappa)/4\pi i, \quad r_1 = 1/4 + (\log \kappa)/4\pi i \quad (10)$$

ここに $X_1(z)$ の枝としては $\ell \operatorname{Im} z X_1(z) = 1$ なるものを選ぶ。この式の詳細な誘導はMuskhelishvili<sup>12)</sup>あるいはMillerとKeer<sup>13)</sup> に見られる。

境界条件式(4)の第4番目の項については、次のように剛体板上でべき級数に展開してあらわすことができる。

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad 2\mu(u' + uv') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (11)$$

ここに $a_n$ と $b_n$ は未定係数である。これを境界条件とするポテンシャル関数はCauchy積分表示し次のようになる。

$$\begin{aligned}\Phi_1(z, z_0) = & \frac{1}{4\pi i} \{X_0(z) \int_{-1}^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n}{X_0^+(t)(t-z)} dt + X_1(z) \int_{-1}^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n}{X_1^+(t)(t-z)} dt \} \\ & + \frac{iP}{4\pi(1+\kappa)} \{(1+i\sqrt{\kappa})X_0(z) + (1-i\sqrt{\kappa})X_1(z)\} \\ \Omega_1(z, z_0) = & \frac{i\sqrt{\kappa}}{4\pi i} \{X_0(z) \int_{-1}^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n}{X_0^+(t)(t-z)} dt - X_1(z) \int_{-1}^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n}{X_1^+(t)(t-z)} dt \} \\ & + \frac{iP}{4\pi(1+\kappa)} i\sqrt{\kappa} \{(1+i\sqrt{\kappa})X_0(z) - (1-i\sqrt{\kappa})X_1(z)\} \\ \alpha_n = & a_n + ib_n/\sqrt{\kappa}, \quad \beta_n = a_n - ib_n/\sqrt{\kappa}. \quad (12)\end{aligned}$$

Pを含む項は、剛体板上に作用するとする合力-Pによるものである。一方上式は無限遠のまわりで展開し

て表現することもできて、次のようになる。

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{e_0 \alpha_n g_{nk}^0 + e_1 \beta_n g_{nk}^1\} z^{-k} + \frac{iP}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e_1 g_k^0 + e_0 g_k^1) z^{-k} \\ \Omega_1(z) &= \frac{i\sqrt{\kappa}}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{e_0 \alpha_n g_{nk}^0 - e_1 \beta_n g_{nk}^1\} z^{-k} + i\sqrt{\kappa} \frac{iP}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e_1 g_k^0 - e_0 g_k^1) z^{-k} \\ e_0 &= 1/(1+i\sqrt{\kappa}), \quad e_1 = 1/(1-i\sqrt{\kappa})\end{aligned}\quad (13)$$

$g_{nk}$  と  $g_k$  の定義については補遺(b) 参照、ただしこれらの表現は  $z > 1$  において有効である。

先にも述べたように、重ね合わせの原理により式(8)と同様に  $\Phi_2(z)$  と  $\Omega_2(z)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Phi_2(z, z_0) &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{e_0 \alpha_n g_{nk}^0 + e_1 \beta_n g_{nk}^1\} f_k(z) + \frac{iP}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e_1 g_k^0 + e_0 g_k^1) f_k(z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \{\alpha H_k(z_0) - \bar{\alpha} H_k(-\bar{z}_0)\} f_k(z) - \alpha f_1(z-z_0) + \bar{\alpha} f_1(z+\bar{z}_0) \\ \Omega_2(z, z_0) &= i\sqrt{\kappa} \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{e_0 \alpha_n g_{nk}^0 - e_1 \beta_n g_{nk}^1\} f_k(z) \\ &\quad + i\sqrt{\kappa} \frac{iP}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e_1 g_k^0 - e_0 g_k^1) f_k(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{e_0 \alpha_n g_{nk}^0 + e_1 \beta_n g_{nk}^1\} 2k(f_k(z) - zf_{k+1}(z)) \\ &\quad - \frac{iP}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e_1 g_k^0 + e_0 g_k^1) 2k(f_k(z) - zf_{k+1}(z)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \{\alpha I_k(z_0) - \bar{\alpha} I_k(-\bar{z}_0)\} f_k(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \{\alpha \overline{H_k(-\bar{z}_0)} - \bar{\alpha} \overline{H_k(z_0)}\} 2k(f_k(z) - zf_{k+1}(z)) \\ &\quad - \alpha \{f_1(z-\bar{z}_0) - 2f_1(z+z_0) + (z+z_0+\bar{z}_0)f_2(z+z_0)\} \\ &\quad + \bar{\alpha} \{f_1(z+z_0) - 2f_1(z-\bar{z}_0) + (z-z_0+\bar{z}_0)f_2(z-\bar{z}_0)\}\end{aligned}\quad (14)$$

$H_k(z)$  と  $I_k(z)$  の定義については補遺(c)を参照。ここにこれらの表現は  $-1 < z < 1$  なる  $z$  に対し  $|z - z_0| < 2a\pi$  するときのみ意味を持つことに注意する。何故なら  $f(z)$  は  $2an\pi i$  ( $n \neq 0$ ) で特異点を持つからである。したがって本問題の解析手法の有効性はこの条件によって制限される。

さて式(9)によって剛体板に沿う境界条件は今や次式のようにになっている。

$$\begin{aligned}2\mu(u'+iv')_{Ds} + 2\mu(u'+iv')_1 + 2\mu(u'+iv')_2 &= 0 \\ (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_{Ds} + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_1 + (\sigma_{yy} - i\sigma_{yx})_2 &= 0\end{aligned}\quad (15)$$

ここで式(12)で行ったと同じように各項を級数展開することによって

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + a_n + A_n) x^n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (d_n + b_n + B_n) x^n = 0 \quad (16)$$

となる。ここに  $c_n$  と  $d_n$  は式(8)により、 $A_n$  と  $B_n$  は式(14)より決定できる。詳細は補遺(d)に与えた。

$A_n$  と  $B_n$  は  $a_n$  と  $b_n$  の線形式であることに注意すると、上式の級数を最初の  $N$  項で打ち切ったとき、 $a_n$  と  $b_n$  に関する  $2N$  個の一次方程式が得られることになる。 $a_n$  と  $b_n$  が決定できれば、式(5)のポテンシャル関数はすべて決定できる。

もうひとつの境界条件(3)<sub>3</sub>をポテンシャル関数を用いてあらわすと

$$0 = \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + e^{-2i\theta} \{\Omega(\bar{z}) + (z-\bar{z}) \overline{\Phi'(z)} - \Phi(z)\} \quad (17)$$

となる。この式の表現では、式(7)で定義される  $\alpha$  は転位密度に置きかえられて、ひびわれ上で積分される

ものとする。式(6)～(14)を(17)に代入して次の転位密度に関する積分方程式を得る。

$$\int_0^{\ell} \frac{2\alpha(\xi)}{t-\xi} e^{-i\theta} d\xi + \int_0^{\ell} \mathcal{L}(\alpha(\xi), t, \xi) d\xi = 0$$

ここに

$$z = te^{i\theta} + 1, z_0 = \xi e^{i\theta} + 1,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha(\xi), t, \xi) &= \alpha [f_1(z-z_0) - f_1(\bar{z}-\bar{z}_0) + e^{-2i\theta} \{f_1(\bar{z}-\bar{z}_0) - f_1(\bar{z}+\bar{z}_0) + (z+\bar{z}_0+\bar{z}+\bar{z}_0)f_z(\bar{z}+\bar{z}_0)\}] \\ &+ \bar{\alpha} [f_1(\bar{z}-\bar{z}_0) - f_1(z+\bar{z}_0) + e^{-2i\theta} \{f_1(\bar{z}-\bar{z}_0) - f_1(\bar{z}+\bar{z}_0) - (z-z_0+\bar{z}-\bar{z}_0)f_z(\bar{z}-\bar{z}_0)\}] \\ &- \alpha \left\{ \frac{1}{z+z_0} - \frac{z+\bar{z}_0}{(\bar{z}+\bar{z}_0)^2} e^{-2i\theta} \right\} - \alpha \left\{ \frac{1}{z+z_0} + \frac{1}{z+\bar{z}_0} e^{-2i\theta} \right\} \\ &+ \Phi_{p+1+z}(z, z_0) + \overline{\Phi_{p+1+z}(z, z_0)} \\ &+ e^{-2i\theta} \{ \Omega_{p+1+z}(\bar{z}, z_0) + (z-\bar{z}) \overline{\Phi_{p+1+z}(z, z_0)} - \overline{\Phi_{p+1+z}(z, z_0)} \} \end{aligned} \quad (18)$$

添字  $p+1+z$  はそれぞれのポテンシャルの和を表す。

### 3. 計算例と考察

特異積分方程式(18)を数値的<sup>14)</sup>に解き、ひびわれ先端での応力拡大係数を求めた。式(10)より明らかのように応力は剛体板先端で振動しながら発散する特異性を持つ。ひびわれを導入することによって、ここでの特異性が振動せずかつ  $1/2$  より小さいものになると仮定した。この仮定によって転位密度関数を唯一に決めることができる。さまざまなひびわれの長さ( $\ell$ )、ひびわれの方向( $\theta$ )、そしてふしの間隔( $2a\pi$ )についてひび先端での応力拡大係数を求めた。またここでの計算では平面歪を仮定しポアソン比を0.2とした。そして精度を考慮し、式(11)は最初の2項をとった。

最初の例として、ふしの間隔が大きくふし及びひびわれ間の相互作用が小さいと考えられる場合について計算を行った。図3にそれぞれのひびわれ長さについて行った結果を横軸にひびわれの方向を、そして縦軸に応力拡大係数をもってあらわした。この結果は無限体中の剛体板から発生するひびわれを解析した Miller と Keer<sup>13)</sup> の場合に帰着するものである。しかし転位のみ存在する場合の彼らの式(10)は  $\sigma_{yy}$  が  $y$  軸に関して反対称になるという点で矛盾を含んでいると考えられる。図3からわかるように、ここに示したすべてのひびわれの長さについて、 $K_I$  はひびわれの方向に関しては弱い関数となっていることがわかる。

次に、図4、5はふしの間隔がそれぞれより実地的な  $a=1.0$  および  $a=0.75$  で与えられる場合について同様の計算を行った結果を示したものである。予想されるように、前例とは大きく異なり、特にひびわれの長さが短い場合、 $K_I$  のひびわれの方向に対する依存性は明確なものになっている。しかしながらひびわれが長くなるにつれて、 $K_I$  の方向依存度は弱くなっていくのがわかる。これらのすべての例では、 $K_I$  はひびわれの長さとともに減少しており、これらのひびわれの成長が安定したものであることを示唆している。

非常に一般的な応力状態における方向も含めたひびわれ進展の予測については、未だ破壊力学の分野で検討されなければならない問題である。過去になされた研究の量はおびただしいが、全般的な合意が得られているひびわれ進展方向も含めた破壊基準は存在しない。一方、Ohlson<sup>15)</sup> のレビューによるとどの破壊基準もある程度は良い予測をなし得るというのも現状のようである。ここでは、簡便のため  $K_I$  が最大の方角にひびわれが進展するという基準に従って結果を解釈する。ふし間隔がその高さに比して非常に長い場合、図3からわかるようにふし先端から発生したひびわれは剛体板とほぼ平行に進むことになる。もっとも  $K_I$  のピークはさほど明瞭でない故、この進展路がそれほど決定的とは思われない。それに対しふし間隔の小さいものの例については、ひびわれは明瞭にある方向性を持って進展することが予想される。図4では進展の角度はふしに対して約  $35^\circ$ 、つまり、棒に対しては約  $55^\circ$  の角度をなすことを示唆している。またさらに間隔

の短い例である図5ではこの角度は約50° となっている。後藤は実験的な研究によってふしから発生する内部ひびわれは鋼棒と約45° から80° をなし、その多くが約60° をなすことを報告している。ここに示した解析モデルの単純さを考えれば、内部ひびわれの進展の様子については、本報告の結果は実験結果をよく支持するものとなっていることがわかる。

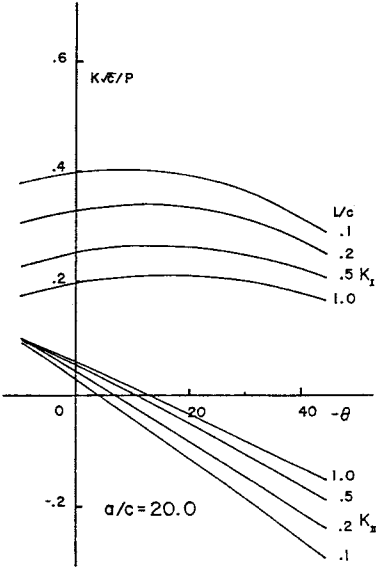


図 3 応力拡大係数

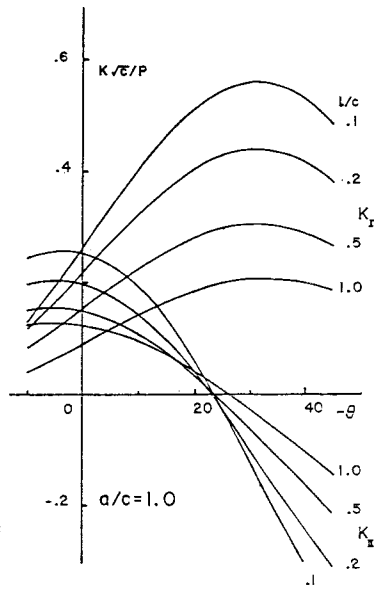


図 4 応力拡大係数

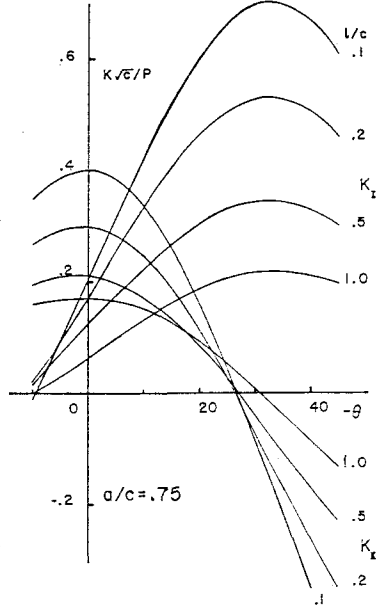


図 5 応力拡大係数

#### 4. まとめ

本報告では、脆性材料中に埋めこまれたふしのある補強材の付着性状を、それに重要な役割を果たしていると考えられる内部ひびわれにもとづいて解析するひとつのアプローチを示した。さらに本解析法に基づく計算結果より、ひびわれの進展状況はふしの間隔に大きく依存していることが、理論的に明らかになった。なお、本報告では省略されたが拘束圧の影響、あるいは、マトリクスの塑性変形の影響も、付着の終局的挙動の大きな因子であると考えられる。今後の研究では、これらを何らかの形で含むものでなければならない。

#### 謝辞

本研究を行うにあたり、名古屋工業大学・梅原秀哲助教授、東京大学・堀井秀之助教授には多大なる助言と励ましをいただいた。ここに感謝したい。

#### 補遺

(a)

$$f_k(z) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{p \geq k} \frac{(-1)^p B_p}{2p(2p-k)!} \frac{z^{2p-k}}{a^{2p}} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{1}{2a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \coth \frac{z}{2a} - \left( \frac{1}{z} \right)^k$$

ただし  $B_n$  はBernoulli数をあらわす。

級数  $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{z - 2an\pi i}$  は絶対収束はしないが和として次の極限を考えるものとする。

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{z - 2an\pi i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - 2an\pi i}$$

(b)

$$g_{nk}^i = \sum_{s=1}^{k-1} p_n^i(k-s) g_s^i$$

$$p_{nk}^i = \sum_{s=0}^{n+k+1} \frac{(\gamma)_{n+k+1-s}}{(n+k+1-s)!} \frac{(1-\gamma)_s}{s!} (-1)^s, \quad g_k^i = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-\gamma)_{k-1-s}(\gamma-1)_s}{(k-1-s)! s!} (-1)^s$$

$$(\gamma)_m = \gamma(\gamma-1) \cdots (\gamma-m+1) \text{ for } m \geq 1, \quad (\gamma)_0 = 1$$

(c)

$$H_k(\xi) = \{E_k^0(\xi) + E_k^1(\xi)\} - \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \{E_k^0(\bar{\xi}) - E_k^1(\bar{\xi})\}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{\kappa}} (\bar{\xi} - \xi) \{D_k^0(-\xi) - D_k^1(-\xi)\}$$

$$I_k(\xi) = i\sqrt{\kappa} \{E_k^0(\xi) - E_k^1(\xi)\} + \{E_k^0(\bar{\xi}) + E_k^1(\bar{\xi})\}$$

$$+ (\bar{\xi} - \xi) \{D_k^0(-\xi) + D_k^1(-\xi)\}$$

$$E_k^i(\xi) = - \sum_{s=1}^{k-1} g_s^i \xi^{k-s-1} / \chi_i(\xi),$$

$$D_k^i(\xi) = \chi_i'(\xi) \sum_{s=1}^{k-1} g_s^i \xi^{k-s-1} / \chi_i(\xi)^2 - \sum_{s=1}^{k-2} (k-s-1) g_s^i \xi^{k-s-2} / \chi_i(\xi)$$

(d)

$$A_{2q} = \frac{iP}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2(m+q)} (e_1 g_{2m}^0 / e_0 + e_0 g_{2m}^1 / e_1) - 2(e_0 \overline{g_{2m}^0} + e_1 \overline{g_{2m}^1}) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(m+q)} (\alpha_n g_n^0(2m) + \beta_n g_n^1(2m)) + 2(e_1 \overline{\alpha_n g_n^0(2m)} + e_0 \overline{\beta_n g_n^1(2m)}) \right\}$$

$$- \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{H_{2m}(z_0) + I_{2m}(z_0)\} - \overline{2H_{2m}(-z_0)} \right]$$

$$+ \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{H_{2m}(-z_0) + I_{2m}(-z_0)\} - \overline{2H_{2m}(z_0)} \right]$$

$$- \alpha \{f_{2q+1}(-z_0) + f_{2q+1}(-\bar{z}_0) - 2(2q+1)f_{2q+1}(z_0) + (2q+1)(z_0 + \bar{z}_0)f_{2q+2}(z_0)\}$$

$$+ \bar{\alpha} \{f_{2q+1}(\bar{z}_0) + f_{2q+1}(z_0) - 2(2q+1)f_{2q+1}(-\bar{z}_0) - (2q+1)(z_0 + \bar{z}_0)f_{2q+2}(-\bar{z}_0)\}$$



$$\begin{aligned}
A_{2q-1} = & \frac{iP}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \left\{ \frac{1}{2(m+q)} (e_1 g_{2m+1}^0/e_0 + e_0 g_{2m+1}^1/e_1) - 2(\overline{e_0 g_{2m+1}^0} + \overline{e_1 g_{2m+1}^1}) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(m+q)} (\alpha_n g_n^0(2m+1) + \beta_n g_n^1(2m+1)) + 2(\overline{e_1 \alpha_n g_n^0(2m+1)} + \overline{e_0 \beta_n g_n^1(2m+1)}) \right\} \\
& - \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{H_{2m+1}(z_0) + I_{2m+1}(z_0)\} - \overline{2H_{2m+1}(-\bar{z}_0)} \right] \\
& + \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{H_{2m+1}(-\bar{z}_0) + I_{2m+1}(-\bar{z}_0)\} - \overline{2H_{2m+1}(z_0)} \right] \\
& + \alpha \{f_{2q}(-z_0) + f_{2q}(-\bar{z}_0) - 4q f_{2q}(z_0) + 2q(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+1}(z_0)\} \\
& - \bar{\alpha} \{f_{2q}(\bar{z}_0) + f_{2q}(z_0) - 4q f_{2q}(-\bar{z}_0) - 2q(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+1}(-\bar{z}_0)\} \\
C_{2q} = & - \frac{iP}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \left\{ \frac{i\sqrt{\kappa}}{2(m+q)} (e_1 g_{2m}^0/e_0 - e_0 g_{2m}^1/e_1) - 2(\overline{e_0 g_{2m}^0} + \overline{e_1 g_{2m}^1}) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{i\sqrt{\kappa}}{2(m+q)} (\alpha_n g_n^0(2m) - \beta_n g_n^1(2m)) + 2(\overline{e_1 \alpha_n g_n^0(2m)} + \overline{e_0 \beta_n g_n^1(2m)}) \right\} \\
& - \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{\kappa H_{2m}(z_0) - I_{2m}(z_0)\} + \overline{2H_{2m}(-\bar{z}_0)} \right] \\
& + \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q}}{(2m-1)!(2q)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{\kappa H_{2m}(-\bar{z}_0) - I_{2m}(-\bar{z}_0)\} + \overline{2H_{2m}(z_0)} \right] \\
& - \alpha \{\kappa f_{2q+1}(-z_0) - f_{2q+1}(-\bar{z}_0) + 2(2q+1) f_{2q+1}(z_0) - (2q+1)(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+2}(z_0)\} \\
& + \bar{\alpha} \{\kappa f_{2q+1}(\bar{z}_0) - f_{2q+1}(z_0) + 2(2q+1) f_{2q+1}(-\bar{z}_0) + (2q+1)(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+2}(-\bar{z}_0)\} \\
C_{2q-1} = & - \frac{iP}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \left\{ \frac{i\sqrt{\kappa}}{2(m+q)} (e_1 g_{2m+1}^0/e_0 - e_0 g_{2m+1}^1/e_1) - 2(\overline{e_0 g_{2m+1}^0} + \overline{e_1 g_{2m+1}^1}) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{i\sqrt{\kappa}}{2(m+q)} (\alpha_n g_n^0(2m+1) + \beta_n g_n^1(2m+1)) + 2(\overline{e_1 \alpha_n g_n^0(2m+1)} + \overline{e_0 \beta_n g_n^1(2m+1)}) \right\} \\
& - \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{\kappa H_{2m+1}(z_0) - I_{2m+1}(z_0)\} - \overline{2H_{2m+1}(-\bar{z}_0)} \right] \\
& + \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+q+1}}{(2m)!(2q-1)!} \frac{B_{m+q}}{a^{2(m+q)}} \left[ \frac{1}{2(m+q)} \{\kappa H_{2m+1}(-\bar{z}_0) - I_{2m+1}(-\bar{z}_0)\} - \overline{2H_{2m+1}(z_0)} \right] \\
& + \alpha \{\kappa f_{2q}(-z_0) - f_{2q}(-\bar{z}_0) + 4q f_{2q}(z_0) - 2q(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+1}(z_0)\} \\
& - \bar{\alpha} \{\kappa f_{2q}(\bar{z}_0) - f_{2q}(z_0) + 4q f_{2q}(-\bar{z}_0) + 2q(z_0 + \bar{z}_0) f_{2q+1}(-\bar{z}_0)\}
\end{aligned}$$

$$c_k = \alpha(-1)^k \{ f_{k+1}(-z_0) + f_{k+1}(-\bar{z}_0) - 2(k+1)f_{k+1}(z_0) + (k+1)(z_0+\bar{z}_0)f_{k+2}(z_0) \} \\ - \bar{\alpha}(-1)^k \{ f_{k+1}(\bar{z}_0) + f_{k+1}(z_0) - 2(k+1)f_{k+1}(-\bar{z}_0) - (k+1)(z_0+\bar{z}_0)f_{k+2}(-\bar{z}_0) \}$$

$$d_k = \alpha(-1)^k \{ \kappa f_{k+1}(-z_0) - f_{k+1}(-\bar{z}_0) + 2(k+1)f_{k+1}(z_0) - (k+1)(z_0+\bar{z}_0)f_{k+2}(z_0) \} \\ - \bar{\alpha}(-1)^k \{ \kappa f_{k+1}(\bar{z}_0) - f_{k+1}(z_0) + 2(k+1)f_{k+1}(-\bar{z}_0) + (k+1)(z_0+\bar{z}_0)f_{k+2}(-\bar{z}_0) \}$$

#### 参考文献

- 1) 岡村甫：高張力異形鉄筋の使用に関する基礎研究(1)，コンクリートジャーナル，Vol.4，No.2，pp.1-11，1986.
- 2) 岡村甫：高張力異形鉄筋の使用に関する基礎研究(2)，コンクリートジャーナル，Vol.4，No.6，pp.1-12，1966.
- 3) 国分正胤・岡村甫：太径鉄筋の使用に関する研究，土木学会論文報告集，第202号，pp.103-113，1972.
- 4) Goto, Y. : Cracks formed in concrete around deformed tension bars, ACI Journal, Vol.68, pp. 244-251, 1971.
- 5) Lutz, L. A. and Gergely, P. : Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete, ACI Journal, Vol.64, pp.711-721, 1967.
- 6) Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, ACI Journal, Vol.64, pp.152-163, 1967.
- 7) 池田尚治：鉄筋コンクリート部材における鉄筋とコンクリートとの応力伝達に関する研究，土木学会論文報告集，第307号，pp.85-97，1981.
- 8) 森田司郎，藤井栄：有限要素法解析における付着モデルの現状の今後と課題，RC構造の有限要素法解析に関するコロキウム論文集，pp.35-42，1984.
- 9) Ingrassia, A. R., Gerstle, W. H., Gergely, P. and Saouma, V. : Fracture mechanics of bond in reinforced concrete, J. of Struct. Engrg., Vol.110, pp.871-890, 1984.
- 10) Lo, K. K. : Analysis of branched cracks, J. Appl. Mech. Vol.45, pp.797-802, 1978.
- 11) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Elastic fields of interacting inhomogeneities, Int. J. Solids Struct., Vol.21, pp.731-745, 1985.
- 12) Muskhelishvili, N. I. : Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- 13) Miller, G. R. and Keer, L. M. : Approximate analytical model of anchor pull-out test, J. Appl. Mech., Vol.49, pp.768-772, 1982.
- 14) Gerasoulis, A. : The use of piecewise quadratic polynomials for the solution of singular integral equations of Cauchy type, Comp. & Maths. with Appls. Vol.8, pp.15-22, 1982.
- 15) Ohlson, N. G. : Aspects of crack initiation and growth in biaxial loading, Role of Fracture Mechanics in Modern Technology (Eds. G.C. Sih and T. Ishihara), pp.173-184., Elsevier, Holland, 1987.

(1987年10月16日 受付)