

結晶塑性モデルによるき裂先端部のひずみ集中化と破壊機構の解析

Analysis of strain localization near a blunting crack tip in crystalline solids

小畑 誠*、奥田純三**、後藤芳顯***、松浦 聖****

By Makoto OBATA, Junzo OKUDA, Yoshiaki GOTO, and Sei MATSUURA

Mechanism of crack propagation is governed by the highly stretched region immediately ahead of the tip. In polycrystalline solids, the size of this region is so small that the validity of the usual phenomenological theory of plasticity is questionable. In this work, elasto-plastic deformation near a blunting crack tip in crystalline solids is studied by the use of the theory of crystal plasticity and a plane model of a crystal. With the assumption of small scale yielding, the boundary layer analysis is carried out numerically by an updated Lagrangian finite element method. A highly localized deformation occurs in the vicinity of a crack tip even without strain softening, suggesting a possible mechanism of crack propagation.

1 はじめに

金属材料中のき裂の挙動が、応力拡大係数や破壊靱性値などの工学的なパラメーターでもって統一的に議論することは、既に広く知られ、現在ではその手法はより多くの種類の材料に対して応用されつつある。しかしながら、そう言った巨視的なあつかいは別に、き裂の発生と進展の微視的な機構については、未だ不明な点が残されている。¹⁾ 現在では多くの実験的研究により、延性的なき裂の進展に関して言えば、それがき裂の先端近傍でおきる塑性変形を含んだ微視的な破壊現象であり、大きな塑性変形によるひずみの集中化、材料中の大小の介在物から発生する微小空隙の発生と成長、および連結などが複雑に関連していることがあきらかになっている。^{2, 3)} このように、き裂の進展は、その先端近傍の塑性変形の大きな領域に支配されていることから、き裂の先端近傍のひずみの分布については、静的、⁴⁻⁶⁾ 準静的、⁷⁾ 動的⁸⁾ なものを含め多くの研究がなされてきている。それらの多くは微小変形を前提としているが、一方で、有限要素法などの偏微分方程式の数値解法の進歩と、強力なデジタル計算機の発達により、大変形を考慮した、き裂先端近傍での弾塑性解析も行なわれてきている。文献(9)はそう言った試みの端緒とも言うべきものであるが、その後も、大小の空隙の影響などを、境界条件や、あるいは構成方程式の中に取り入れ、より精緻な解析も行なわれ

* Ph.D. 名古屋工業大学 助手 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 同上・大学院 修士課程

*** 工博 同上 助教授

**** 工博 同上 教授・副学長

ており、破壊の進行現象と応力拡大係数などの破壊力学パラメーターとの関連が論じられている。¹⁰⁻¹³⁾

これらの解析では、適切な構成方程式を用いることが非常に重要であることは言うまでもないが、現在までの研究では、J 2 流れ理論や、材料中の微小介在物からの空隙の発生と成長を現象学的に勘案したグルソンの構成方程式、¹⁴⁾あるいは J 2 コーナー理論¹⁵⁾によるものが多い。しかしながら、上に述べたように、き裂の進展は、ひずみの集中化などの一種の不安定現象が関連していると考えられており、そういった不安定現象の解析に J 2 理論のようになめらかな降伏曲面を持つ塑性理論がしばしば、適当でないことは既に知られているとおりである。また、微小空隙の影響を考えたグルソンの理論を用いるとしても、その理論の基本となる仮定が、ここで扱わなければならない程度の大変形下においても適当か否かについてはまだ検討が必要と思われる。疲労き裂も含めて、破壊の進行に関して特に重要と考えられる領域の大きさは、様々な実験的研究より数 μm から数 $100\mu\text{m}$ ^{2, 3)} であると思なされているが、これは、典型的な結晶粒の大きさを考えると、多結晶金属の場合、J 2 理論に代表される現象学的塑性論が有効である物質の一様性の尺度の適用が疑問となる範囲にある。仮に、J 2 系の塑性理論の適用の結果が微視組織の影響をなんらかの平均的な意味で含めたものをあらわすにしても、そのことは、未だ具体的には解明されたとは言えず、微視的な塑性理論にもとづいた考察も限られている。¹⁶⁾

破壊進行領域の長さの尺度の考察から、本報告では単結晶の微視的な塑性理論に模したモデルにもとづいてき裂先端近傍の弾塑性変形を解析する。境界値問題は小規模降伏を前提とした、境界層近似によって設定し、数値解法としては更新ラグランジュ流に定式化し、定ひずみ要素を用いた有限要素法を用いる。なお、著者らは既に、同様の手法によりき裂先端に空隙のある場合について解析したが、¹⁷⁾本報告では特にき裂先端近傍でのひずみの集中化の様子を J 2 理論にもとづく結果と比較しながら明らかにする。

2 構成方程式

ここでは、結晶塑性論にもとづき、任意の変形と回転に対して有効な単結晶の構成方程式について簡単に述べる。¹⁸⁾結晶塑性論では、単結晶の塑性変形は結晶面での転移すべりのみによって起こるものとし、弾性変形は結晶格子のよじりの結果とみなす。(図 1) 実際の結晶では、すべり面は結晶の幾何構造によって決定されるすべり系を持つ。このように、結晶塑性論は、金属の塑性の微視的なメカニズムに物理的に即した理論であり、J 2 理論に代表される巨視的な塑性論とは異なる発展を遂げてきた。微視的な塑性論をもとに、なんらかの平均化の手法を用いて多結晶金属の巨視的な挙動を推測する試みは数多く行われてきており、それにより、分岐、不安定、塑性誘導異方性の発達など多くの現象が統一的に説明できることが知られている。¹⁹⁻²⁴⁾以下、テンソルは空間に固定された直交座標系の成分であらわす。また、特にことわらない限り総和規約を用いる。

弾塑性変形をする単結晶について、変形勾配テンソル F_{ij} は弾性部分と塑性部分に分解して次のように表現できる²⁵⁾。

$$F_{ij} = F^e_{ik} F^p_{kj} \quad (1)$$

この分解にしたがって速度勾配テンソルを求めると次式ようになる。

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \dot{F}^e_{ik} F^{e-1}_{kj} + \dot{F}^e_{im} F^p_{mn} F^{p-1}_{nj} F^{e-1}_{ij} \\ &= L^e_{ij} + L^p_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

さらに速度勾配テンソルのそれぞれの項は、対称部分、変形率テンソル D_{ij} と逆対称部分、スピントンソ

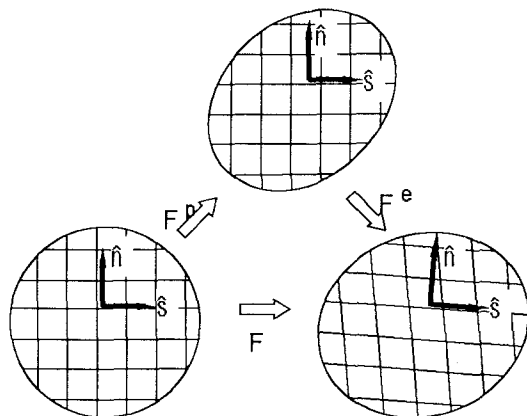


図 1 結晶の弾塑性変形

ル W_{ij} とに分解できる。(2)式第1項は速度勾配テンソルの弾性変形寄与分であり、その対称部分は応力の変化率と関係づけられる。ここでは、その関係として物理的考察から最も適当と思われる次式を用いる。²⁶⁾

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \mathcal{L}_{ijk} D^e_{kl}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - W^e_{ik} \epsilon_{kj} + \epsilon_{ik} W^e_{kj} \quad (3)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ はキルヒホフ応力 ϵ_{ij} の F^e_{ij} によって定義される変形に対するヨーマン変化率である。 \mathcal{L}_{ijk} は単結晶の弾性率テンソルであらわす。それは結晶の幾何構造に依存しており、異方性を持つのが通常である。一方、(2)式第2項は、塑性変形寄与分に対応し、現象学的理論におけるそれとは異なり、 α すべり系でのすべり率を $\dot{\gamma}^\alpha$ として明解に定義することができる。 $\dot{\gamma}^\alpha$ はいわゆる中間変形状態に対して考えるべきものであるから

$$\dot{\epsilon}^p_{ij} = F^p_{ik} F^{p-1}_{kj} = \sum_{\alpha} \hat{s}^{\alpha}_{ik} \hat{n}^{\alpha}_{kj} \dot{\gamma}^{\alpha} \quad (4)$$

となる。すべりによっては格子は歪まないから \hat{s}^{α} と \hat{n}^{α} は図1に示すように無応力状態を初期状態としてそこでの結晶のすべり系の幾何学的条件によって定められる。例えば、面心立方格子を持つ結晶ではすべりの方向も含めて24個のすべり系を持つ。(2)式より現在の変形状態に対する量としては

$$L^p_{ij} = \sum_{\alpha} s^{\alpha}_{ik} n^{\alpha}_{kj} \dot{\gamma}^{\alpha}, \quad \text{ただし} \quad s^{\alpha}_{ik} = F^e_{ik} \hat{s}^{\alpha}_{kl}, \quad n^{\alpha}_{kj} = \hat{n}^{\alpha}_{kl} F^{e-1}_{lj} \quad (5)$$

を得る。以上の関係式に加え、すべり率 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ と応力変化率あるいは応力との関係が与えられれば、単結晶の弾塑性構成方程式を得ることができる。本報告では速度に依存しない場合の塑性を考え、次のシュミット則によってその関係を与える。

$$\tau^{\alpha} = \tau^{\alpha}_0 \quad \text{かつ} \quad \dot{\epsilon}^{\alpha} = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad \text{ならば} \quad \dot{\gamma}^{\alpha} \geq 0$$

$$\text{それ以外では} \quad \dot{\gamma}^{\alpha} = 0$$

ただし、

$$\tau^{\alpha} = \tau_{ij} p^{\alpha}_{ij}, \quad p^{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2} (s^{\alpha}_{ij} n^{\alpha}_{ij} + s^{\alpha}_{ji} n^{\alpha}_{ji}) \quad (6)$$

で与えられる。 $h^{\alpha\beta}$ は加工硬化係数マトリクスで、 β すべり系のすべりによる α すべり系の硬化をあらわす。 $h^{\alpha\beta}$ には様々な形が考えられるが、本報告では次のものを用いる。²⁷⁾

$$h^{\alpha\beta} = h(\delta^{\alpha\beta} + q(1 - \delta^{\alpha\beta})), \quad h = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{h_0 \gamma}{\tau_s - \tau_0}\right) \quad \gamma = \sum_{\alpha} \int |\dot{\gamma}^{\alpha}| dt \quad (7)$$

q は加工硬化係数の対角成分と非対角成分の比で、 $q=1$ の時テイラー硬化をあらわす。 h_0 、 τ_s 、 τ_0 はそれぞれ、すべり系の初期硬化係数、飽和降伏応力、初期降伏応力である。(6)式より、このシュミット則によって与えられる降伏曲面が応力空間での多面体の表面となることがわかる。したがって、降伏曲面はJ2理論によるものと異なり最初から多くのとがりを持つことになる。この降伏曲面のとがりは結晶塑性論からの帰結の中で最も重要なもののひとつである。実際に、多結晶金属に認められる、降伏曲面の大きな曲率を持つ部分の発達、単結晶レベルでの降伏曲面のとがりが巨視的に観測されるものである。また、この流れ則が、いわゆる直交則をみたしていることは、(4)、(6)式よりあきらかであろう。 τ^{α} を微分すると

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\epsilon}_{ij} p^{\alpha}_{ij} + 2D_{ik} \epsilon_{kj} \omega^{\alpha}_{ij} = (p^{\alpha}_{ij} \mathcal{L}_{ijk} + 2\delta_{ij} \epsilon_{kj} \omega^{\alpha}_{ij}) D_{kl} \quad (8)$$

となり、かっこ内の第2項は第1項に比べて、通常の物質では小さいと考えられるのでそれを無視することによって(4)~(7)より、次の弾塑性構成方程式を得る、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \{\mathcal{L}_{ijk} - \sum_{\alpha\beta} \mathcal{L}_{ijmn} p^{\alpha}_{mn} M^{\alpha\beta} p^{\beta}_{rs} \mathcal{L}_{rskl}\} D_{kl}, \quad M^{\alpha\beta} = (h^{\alpha\beta} + p^{\alpha}_{ij} \mathcal{L}_{ijk} p^{\beta}_{kl})^{-1} \quad (9)$$

$M^{\alpha\beta}$ は右辺のマトリクスとしてのインバースをあらわす。 α 、 β は(6)の条件をみたす活動系のみについて和をとるものとする。これは、左辺が $\dot{\epsilon}_{ij}$ である以外、形式的に微小変形の理論の場合と同じである。また直交則をみたすことから、J2理論による弾塑性構成方程式に対するあきらかな類似性がみられる。変形後の状態を基準状態として更新していく、更新ラグランジュ流の数値計算に適用することを念頭に、第1種ピオラ=キルヒホフ応力を用いて(9)式を書き改めると次のようになる。

$$N_{ij} = \{\mathcal{L}_{ijk} - \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{ij} + \delta_{ji} \sigma_{kl}) - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \delta_{ij} - \sigma_{ji} \delta_{kl})\}$$

$$-\sum_{\alpha\beta} \{ \mathcal{L}_{ijmn} p_{mn}^\alpha + \omega_{im}^\alpha \sigma_{mj} - \sigma_{im} \omega_{mj}^\alpha \} M^{\alpha\beta} p_{rs}^\beta \mathcal{L}_{rsxi} \} L_{ki} \quad (10)$$

$$\omega_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} (s_i^\alpha n_j^\alpha - s_j^\alpha n_i^\alpha)$$

ここで、 σ_{ij} はコーシー応力、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。この式で、 ω_{ij}^α を含む項は有限変形の影響をあらわすと同時に、塑性変形が結晶塑性論におけるように離散的な方向のすべり面上でのすべりによって支配されていることを示すものであり、通常の現象学的塑性理論ではあらわれてこないものである。これらの項は L^p_{ij} の逆対称部分、すなわち塑性スピンによるものであり、結晶塑性論の枠組みの中では、自然なかたちであられることには注意してよいと思われる。

(10)式は、任意の構造の結晶について適用可能な式であるが、本報告では、平面問題のみをあつかうので数値解析には、図2に示される、方向も含めて4個のすべり系からなる2重すべりモデルを用いる。²³⁾これは、2次元的に変形する結晶に対して考案された縮退した結晶モデルである。2重すべりモデルは特定の結晶構造に対応するものではないが、その有効性については、既に、文献(23)、(26)に示されている。また、このモデルでは、独立したすべり系は2つしかないために、速度に依存しないすべりでありながら任意の塑性変形率 D^p_{ij} に対しすべり率 $\dot{\gamma}^\alpha$ が幾何学的な考察のみによって決定することができ、数値計算上特に有利である。図2に対し、 \hat{s}^α と \hat{n}^α は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{n}^1 &= \hat{n}^3 = (-\sin(\psi-\phi), \cos(\psi-\phi)) \\ \hat{n}^2 &= \hat{n}^4 = (\sin(\psi+\phi), -\cos(\psi+\phi)) \\ \hat{s}^1 &= -\hat{s}^3 = (\cos(\psi-\phi), \sin(\psi-\phi)) \\ \hat{s}^2 &= -\hat{s}^4 = (\cos(\psi+\phi), \sin(\psi+\phi)) \end{aligned} \quad (11)$$

ϕ についての議論は文献(26)に詳しいが、ここでは $\phi=55^\circ$ とした。

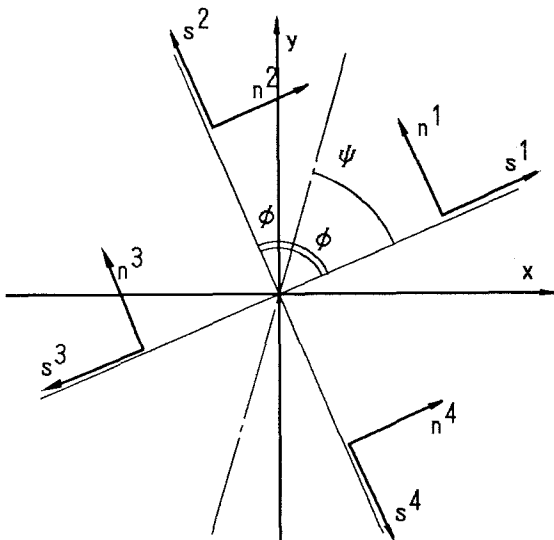


図2 単結晶の2重すべりモデル

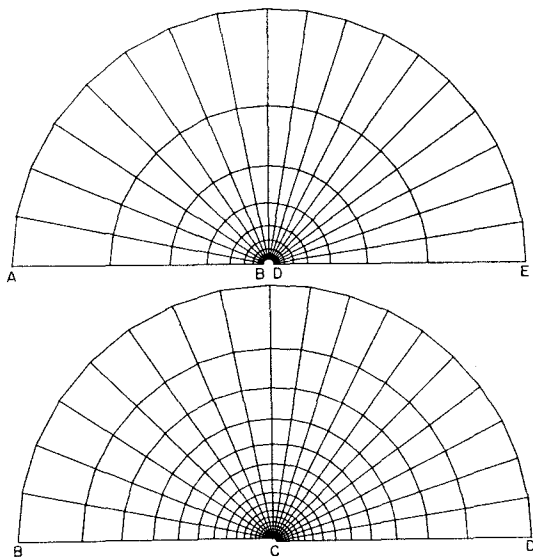


図3 要素分割

3 境界値問題

き裂近傍の弾塑性解析のための境界値問題を設定するには、実際の試験片の形状と境界条件を対象にする方法と小規模降伏の仮定のもとに境界層近似解析を行なう方法⁹⁾とが考えられるが、ここでは後者を用いる。そして、数値計算法としては、この種の大変形解析に適用可能な、更新ラグラン

表1 塑性モデルおよび材料定数

ケース	塑性モデル	E/τ_Y^0	ν	τ_s/τ_Y^0	$h0/\tau_Y^0$
a	J 2	300	0.3	1.5	2.0
b	J 2	300	0.3	1.5	4.0
c	結晶塑性	600	0.3	1.5	1.0
d	結晶塑性	600	0.3	1.5	2.0

ジュ流に定式化した有限要素法を用いる。離散化に用いた要素はいわゆる定ひずみ三角形要素である。計算は増分的に行い各要素での相当塑性ひずみ増分 γ が十分小さくなるように増分幅を制御した。き裂先端近傍の変位、応力場がき裂面に関して対称な場合を考え、その場合の解析対象と要素分割を図3に示す。図3の四角形はそれぞれ対角線より作られる4個の三角形よりなる。総節点数は1052、要素数は2012である。最外円周部の半径はき裂先端の半径の4000倍とした。

境界層解析の方法と場の対称性に従えば、境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{円弧AB上で} \quad & u_x = K_1 u_x(r, \theta, \nu), \quad u_y = K_1 u_y(r, \theta, \nu) \\ \text{CD 及び DE上で} \quad & t_x = 0, \quad u_y = 0 \\ \text{AB 及び BC上で} \quad & t_x = t_y = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここに K_1 はモードIの応力拡大係数であり、 $u_x(r, \theta, \nu)$ と $u_y(r, \theta, \nu)$ は等方線形弾性体に対して与えられるき裂近傍の変位特異漸近解である。また、 t_x と t_y はトラクションをあらわす。

それぞれの計算例における材料定数の設定と用いた塑性理論に関しては表1にまとめて示す。ここに示すように弾性定数は、すべて等方的なものを用いた。そして、(7)式の q は1とした。先に述べたように、結晶塑性モデルは強い初期塑性異方性を有するため、き裂面に関するき裂近傍の場の対称性を保つように、結晶の方向は領域全体で $\phi = 90^\circ$ としている。したがって結晶粒界の影響は考慮していない。ここでは、比較対象として等方効果のみを仮定したJ2流れ理論を用いた場合も考えた。加工硬化係数に関しては、(7)式で、 γ を相当塑性ひずみ ε^p に置き換えたものを用いている。2重すべりモデルとJ2理論では、材料定数に関して厳密に対応させることは困難であり、これらの数値はそういった対応から与えられたものではない。a)にくらべb)の場合では、加工硬化係数の減少の割合が異なり、b)の方が塑性変形とともにすばやく減少する。a, b)それぞれ、 $\varepsilon^p = 0.45, 0.22$ で初期硬化係数のほぼ1/10となる。

4 数値解析結果と考察

以下、数値解析結果は初期降伏応力 τ_y^0 と初期形状におけるノッチの半径 a_0 で無次元化し、 $\bar{\cdot}$ （バー）をつけてあらわす。ただし、結晶塑性モデルの初期降伏応力に関しては $2\tau_y^0$ を用いる。外荷重の指標としてはここでは応力拡大係数ではなく、この種のアプローチでよく用いられるJ値を使う。本報告であつたっている平面ひずみ状態で小規模降伏の仮定が成立している範囲においては、J値は次式で与えられる。

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_1^2$$

まず、ノッチ先端部の変形状態を初期変形状態とあわせて図4～6に示す。図4はJ2理論によって得られた結果である。文献(9)にも報告されているとおり、ノッチ先端での変形は非常に大きいにもかかわらず、変形の状態はきわめてなめらかであり、ノッチもほぼ相似形を保ちながら拡大している。本来、なめらかな降伏曲面を持つうえに等方硬化をおこすことにより降伏

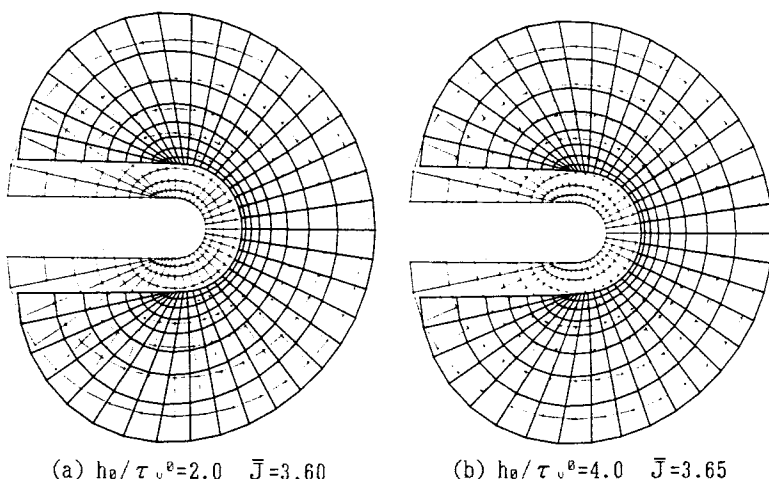
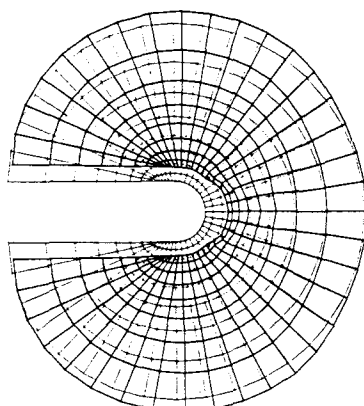
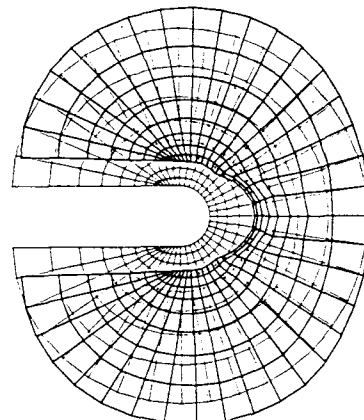


図4 き裂先端部の変形 (J2理論)

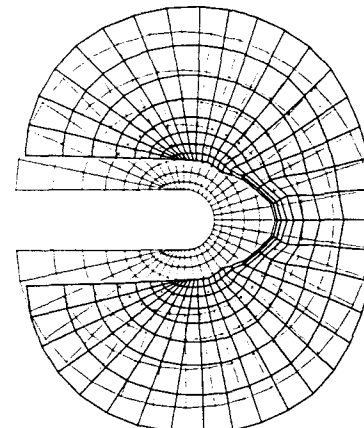
曲面の曲率がいっそう失われるために、ひずみ集中化の傾向も見い出すことはできない。また、これらの例では加工硬化による変形の違いもほとんどないことがわかる。一方、図5は結晶塑性モデルc)の場合のいくつかの外荷重状態での結果である。 J 2理論とはあきらかに異なり、著しいひずみの集中化が見られる。 \bar{J} が1.8付近でノッチ先端部やや上方にひずみの集中化が始まりその後はノッチの先端部がき裂平面に平行に突出するかたちでノッチが変形していく様子が読み取れる。この変形はひずみの集中化によるき裂進展の機構を強く示唆するものである。まったく同じ傾向は、図6に示す同じ結晶塑性モデルで加工硬化係数が異なるd)の場合にも見られる。この場合では、加工硬化係数の減少がc)に比べて顕著であるためか、ひずみの集中化はより鮮明である。用いた塑性理論による変形形状の差は、図7に示した相当塑性ひずみの分布にもよく現われている。結晶塑性モデルを用いた場合では既にノッチ先端部に大きなひずみが集中している。ここに示されていることから、単純なJ 2理論によれば、き裂の進展と言う、より局所的な現象を解析することは困難なことがわかる。



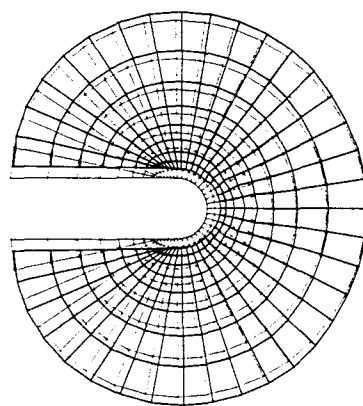
(1) $\bar{J}=1.83$



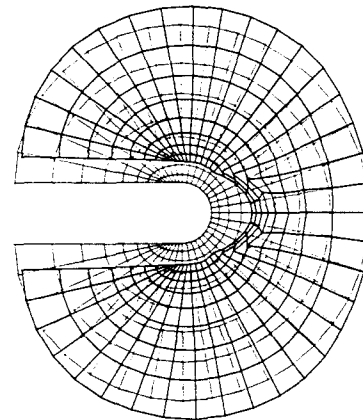
(2) $\bar{J}=3.46$



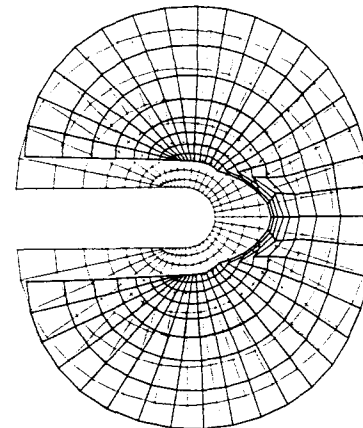
(3) $\bar{J}=4.32$



(1) $\bar{J}=1.19$



(2) $\bar{J}=3.15$



(3) $\bar{J}=4.09$

図5 き裂先端部の変形 $h_0/\tau_y^0=1.0$
(結晶塑性モデル)

図6 き裂先端部の変形 $h_0/\tau_y^0=2.0$
(結晶塑性モデル)

図5、6に見られるような、ノッチ先端のえぐられるように変形した領域の境界は、せん断帯ともみなされる大きなせん断変形をともなう狭い部分によって仕切られている。すなわち、この境界領域にせん断帯が発生しているとみなされることがわかる。き裂先端近傍での、せん断帯の発生をともなうひずみ集中化については、これまでグルソンの構成方程式やJ 2コーナ理論を用いた場合について報告されている。¹¹⁻¹³⁾

ここにあげた例はグルソンの理論の場合のようなひずみ軟化によって引き起こされたものではなく、 J 2 コーナー理論のように降伏曲面のとがりに起因するものであるが、ひずみ集中の様子は、文献(11)のものより著しい。ここに示したひずみの集中化は、微小介在物等の影響をいっさい含んでおらず純粋に有限変形の影響により導かれていることが重要である。き裂面の観察により、塑性変形をともなうき裂の進展への微小介在物の関与が指摘されているが、それらの微小介在物とひずみの集中化との関係は必ずしも明確ではない。ここにあげた例は、グルソンの構成方程式を使い、微小介在物からの空隙の発生と成長によるひずみ軟化に原因を求めなくても、すなわち空隙の発生をひずみ集中化の結果であるとみなしても、き裂進展につながるひずみ集中化は十分起こり得ることを示すものである。

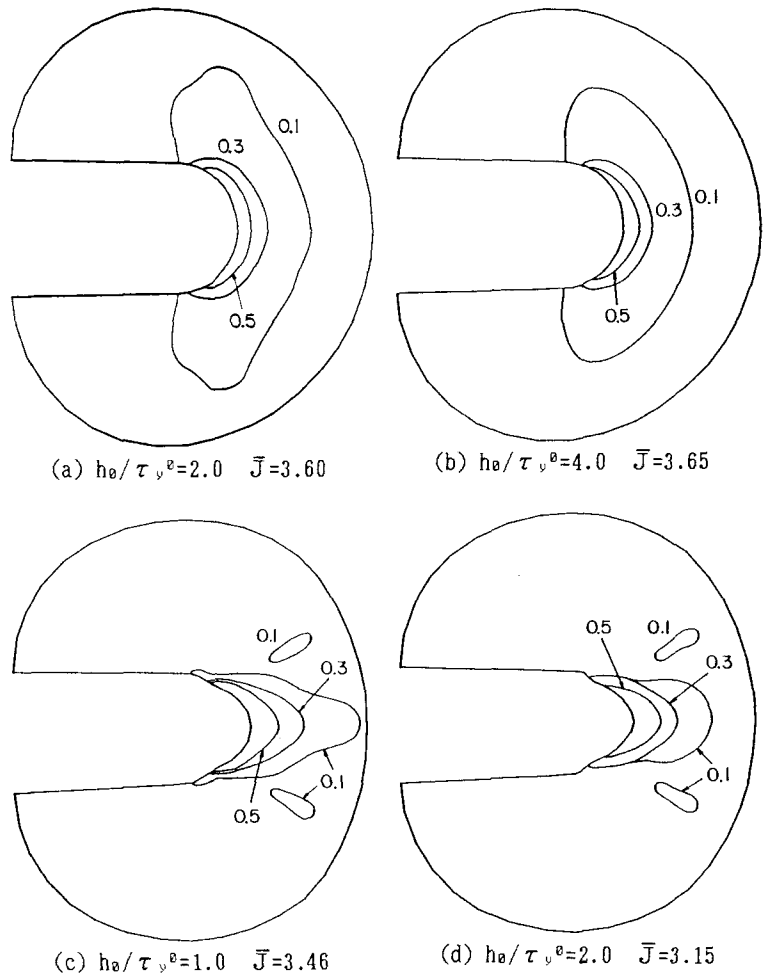


図7 相当塑性ひずみ分布

せん断帯の発生などの有限変形によるひずみ集中化については、既に理論的にも優れた研究がなされており、²⁸⁾ 数値的にも特に有限要素法によるものが数多く報告されている。^{29, 30)} 文献(29)によれば、本報告で用いた対角三角形からなる四角形要素はせん断帯のようなひずみ集中を表現するのに適しているが、ひずみの集中は要素分割に敏感であることが示されている。実際、ここに示した例でも、ノッチ上方部の分割が粗い場合では、ひずみの集中する領域が先端部よりややノッチ上方部にずれる傾向が認められた。文献(29)は主としてほとんど様な変形状態からのひずみ集中化についてあつかっているため、ひずみ集中化以前の段階では有限要素法による解は要素分割にほとんど依存していない。言い換えれば、要素分割はひずみ集中化の解析のみを目的として考えることができる。しかしながら、ここにあげた例では、要素分割はひずみ集中化そのもだけでなく、それ以前の解の精度にも大き

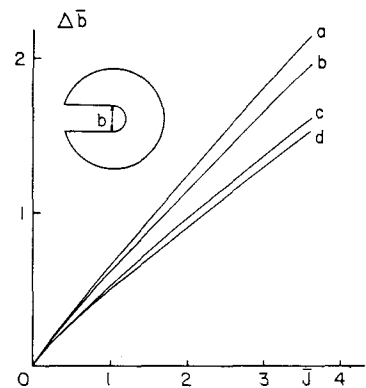


図8 \bar{J} - $\Delta \bar{b}$ 曲線

な影響を与える。したがって、この場合の要素分割に対する敏感さの議論ははるかに複雑になる。ひずみ集中化の解析において、離散化に用いる要素の種類の影響についてはまだ統一的な結論は得られていない。そのためひずみ集中化の起こる位置や方向については、まだ細かい検討が必要であろうが、少なくともここにあげた例からは、結晶塑性モデルを用いた場合、き裂の進展に関連があると思われるひずみの集中化を予測することは可能であると考えられる。

図8はそれぞれの場合においてJとき裂開口変位との関係をあらわしたものである。J2理論によるものも結晶塑性モデルによるものも、初期加工硬化係数の大きい、したがって加工硬化がすばやく消失する方がき裂開口変位でみた場合、剛な挙動を示している。全体に結晶モデルの方が小さな開口変位を与えるが、材料定数の対応が厳密でないことから、正確な意味での構成モデルによる依存を比較することは困難である。この図からあきらかなように、構成方程式の種類によらず、Jのごく小さい範囲をのぞいてJとき裂開口変位はほぼ線形の関係がある。これは、J2理論にべき乗硬化則を仮定したもの、⁹⁾あるいはグルソンの構成方程式を用いたもの^{12, 13)}にも共通する結果である。したがって、き裂開口変位と外荷重パラメータの関係は、構成方程式の種類には鈍感であり、ほとんどの場合線形とみなしてよいことになる。上に示したようにき裂先端近傍の変形の様子はそれぞれでまったく違うことを考えるとこの事実は注目に値する。特に、結晶モデルでは、すでにひずみの集中が見られるにもかかわらず、図8にその影響はほとんどあらわれていない。これは、き裂開口変位と言った指標を用いてき裂の進展などの議論をする限りでは、数値解析においてははるかにあつかいやすいJ2理論の適用をある程度正当化するものである。しかし、そのような指標とき裂の進展との関連については、また別の問題であることは言うまでもない。

5 まとめ

本報告では、構成則として結晶塑性モデルを用い、有限要素法によってき裂先端近傍での弾塑性解析を行なった。その結果、ひずみ軟化を仮定しなくてもき裂先端で著しいひずみの集中が起こり得ることがあきらかになった。特に、ここであげた例では、ノッチの先端が深くえぐられるようにひずみの集中化が起き、き裂の進展の現象との関連を強く示唆した結果が得られた。同じ対象に、J2理論による解析を行なったところ、まったく対照的に、ひずみの集中は見られなかった。したがって、破壊の進行現象そのものの解析には、J2理論はほとんど無力であると結論できる。その一方で、き裂開口変位といった指標でき裂先端部の変形をあらわすと、それは構成則には鈍感でどちらの構成則モデルを用いてもJに対しほぼ線形の関係が見られた。現象学的塑性理論によるき裂先端部の解析は、少なくともき裂開口変位といった指標を用いて議論する限りにおいて有効であるものと考えられる。

本報告で用いた構成則モデルは、繰返し荷重も含めて基本的には任意の荷重履歴に対し何の変更もなしに対応することができる。したがって、疲労き裂の進展に対しても応用することが可能と考えられる。さらには、結晶粒界などの影響も取り入れることも簡単である。一方、数値計算上のあつかいは複雑になるが、3次元の結晶モデルによることは、現実の材料との具体的な対応を考える上では重要であろう。これらは、今後の課題として残されているといえる。

謝辞

本研究は文部省科学研究費の援助の下に行なわれた。また、本研究を行なうにあたり、様々なご協力をいただいた小井手秀人氏（名工大大学院）に感謝する。

1) 三木千寿、坂野昌弘、豊田幸宏、構造工学論文集、35A, 321, 1989.

- 2) Cox, T. B. and Low, J. R., Metall. Trans., 5, 1457, 1974.
- 3) Green, G. and Knott, J. F., J. Engineering Materials and Technology, 37, 37, 1976.
- 4) Hill, R., The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- 5) Rice, J.R. and Rosengren, G.F., J. Mech. Phys. Solids, 16, 1, 1968
- 6) Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 16, 13, 1968
- 7) Slepyan, L. I., Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela, 9, 57, 1974.
- 8) Drugan, J.W., Rice, J.R., and Sham, T.L., J. Mech. Phys. Solids, 30, 447, 1982.
- 9) McMeeking, R. M., J. Mech. Phys. Solids, 25, 357, 1977.
- 10) 宮本博、菊池正紀、久保光宏、猪平剛、材料、37、878, 1988
- 11) Needleman, A. and Tvergaard, V., ASTM STP 803, 80, 1983.
- 12) Aoki, S., Kishimoto, K., Takeya, A., and Sakata, M., Int. J. Fracture, 24, 267, 1984.
- 13) Needleman, A. and Tvergaard, V., J. Mech. Phys. Solids, 35, 151, 1987.
- 14) Gurson, A.L., J. Engrg. Mater., 99, 2, 1977
- 15) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., J. Mech. Phys. Solids, 27, 465, 1979
- 16) Kitagawa, H., and Komeda, S., Proc. ICCM 86, Tokyo, V-157, 1986
- 17) 小畑誠、奥田純三、後藤芳顯、松浦聖、結晶塑性モデルによるき裂先端近傍の弾塑性解析, 土木学会論文報告集(投稿中)
- 18) Asaro, R. J., J. Appl. Mech., 50, 921, 1983.
- 19) Taylor, G. I., Proc. Roy. Soc. Lond., A145, 362, 1934.
- 20) Batdorf, S. B. and Budiansky, B., NACA TN. 1871, 1949.
- 21) Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, 13, 89, 1965.
- 22) Hutchinson, J. W., Proc. Roy. Soc. Lond., A319, 247, 1970.
- 23) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S., Proc. R. Soc. Lond., A394, 87, 1984.
- 24) Nemat-Nasser, S. and Obata, M., Proc. R. Soc. Lond., A407, 343, 1986.
- 25) Lee, E. H., J. Appl. Mech., 36, 1, 1969.
- 26) Asaro, R. J., Acta Metall., 27, 445, 1979.
- 27) Asaro, R.J. and Needleman, A., Acta Metall. 33, 923, 1985
- 28) Hill, R. and Hutchinson, J. W., J. Mech. Phys. Solids, 23, 239, 1975.
- 29) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K. K., J. Mech. Phys. Solids, 29, 115, 1981.
- 30) Peirce, D, Asaro, R.J. and Needleman, A., Acta. Metall., 31, 1951, 1983.

(1989年10月2日受付)