

高次元超立体鎖符号の幾何学的な復号法と訂正限界

—高誤り率 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ における訂正能力—

黒田 慎^{†*}

山口 栄作[†]

内匠 逸[†]

畑 雅恭[†]

A Geometrical Decoding Algorithm and Correcting Limit of High-Dimensional Hyper-Cubic Ring Code — Correcting Ability in BER of $10^{-1} \sim 10^{-2}$ —

Shinichi KURODA^{†*}, Eisaku YAMAGUCHI[†], Ichi TAKUMI[†], and Masayasu HATA[†]

あらまし 本論文では、パリティチェック符号を高次元化した符号（高次元鎖符号と呼ぶ）の新しい復号法を提案する。先に提案した鎖符号に対する復号法は、訂正法が複雑で計算に時間がかかる問題を抱えていた。我々は、高次元鎖符号が複数の2次元鎖符号に分割できる点に着目し、計算量の少ない2次元鎖符号の誤り訂正を繰り返すことで高次元鎖符号の誤り訂正が行えることを示した。この復号法は、従来の復号法と比べてより少ない計算量で同等の訂正能力を得ることができる。また、高誤り率下では、ランダム誤りとバースト誤りが混在するため、複合誤り訂正を行う符号が望まれるが、提案する符号の復号法は次元分割を行っているため、伝送ブロック上に発生した誤りが各2次元面に均等に拡散されるため、2次元面では通信路上の誤りがランダム的となり、誤り訂正が効率的に行われる。また、解析とシミュレーションにより、次元を大きくすると訂正能力が高まり、そのときの訂正能力の限界は符号のサイズ m で決定されることを示した。更に、畳込み符号、リード・ソロモン符号との性能比較を行い、鎖符号は誤り訂正の処理利得が高く、また、訂正のスレッシュホールド点も高い誤り率にあると同時に復号による誤復号率も小さいため、高誤り率での誤り訂正に適した符号であることが示された。

キーワード 誤り訂正符号、高誤り率、高次元鎖符号、復号アルゴリズム

1. ま え が き

近年、移動体通信をはじめマルチメディア通信の進展により、我々の身近なところにデジタル通信方式が盛んに導入されており、平均ビット誤り率 (BER: Bit Error Rate) が $10^{-1} \sim 10^{-2}$ の極めて劣悪な環境における通信品質の維持が求められる場合がある。しかし、従来の誤り訂正符号では BER が 10^{-3} 程度までの動作が一般的であり、より劣悪な BER においては復号によりかえって BER が増大する傾向がある。BER が 10^{-2} 程度の領域について、Shu Lin [1] などがリード・ソロモン符号 (Reed Solomon: RS) と畳込み符号の特性評価を行っており、単独の符号としては畳込み符号の方が有効とされているが、それ以上に高い BER における誤り訂正符号の積極的な探索はほとんど見受けられない。

高い BER の環境では、受信側においてバースト誤りであるかランダム誤りであるかを識別することは意味がなく、同一の符号語内に両者が混在する可能性が高い。このような、より一般的なタイプの誤りを効率的に訂正できる符号は現在のところほとんど知られていないのが実状である [2]。

そこで本研究では、先に提案した [3] 高い BER での訂正に有効な高次元のパリティチェック符号（高次元鎖符号と呼ぶ）について、復号特性を検討すると共に、新しく効率的な復号法を提案する。この復号法は、高次元の符号が何方向かに写像された2次元面の符号の集合により構成されることに着目し、2次元面における単一誤り訂正をすべての方向で行う復号法である [4]。また、高次元鎖符号の伝送ブロックは高次元のトーラス構造上の結び目を形成しており [5]、伝送ブロック上に発生した誤りが2次元符号に対して均等に拡散配置されるため、この復号法では、バースト誤りやランダム誤りを区別しない複合誤り訂正が行われる。

先に、高次元鎖符号に対し、 n 次元鎖符号がもつ n

[†] 名古屋工業大学知能情報システム学科, 名古屋市
Department of Artificial Intelligence and Computer Science,
Nagoya Institute of Technology, Nagoya-shi, 466 Japan

* 現在, 三菱電機株式会社

方向の検査線でのパリティチェックの結果より誤りフラグテーブル上に誤り重み付けを行い、その重み分布より誤り箇所を特定する動作を誤り検出がなされなくなるまで行う復号法[6]を提案しているが、この方法は以下に示す問題点を抱えていた。次元 n に比例して検査線の数が増えるので、計算に要する時間が増大する。幾何学的に対称な形に誤りが配置された場合、誤り訂正が不能となり誤り検出がされ続けるため、無限の繰り返しに入ることがある。しかし今回提案する復号法は、 n 次元鎖符号を2次元鎖符号に分割するため、上に掲げた問題点を解決できた。また、性能的には同等の性能を実現できた。

次に訂正能力に関する解析を行い、通信路上の BER を p 、符号サイズを m とすると、 $(m^2 - 1)p < 1$ の条件を満たす場合、次元数 n が大きくなるにつれ訂正不能率がゼロに収束することを導き出した。従来の符号では、最小距離から求められる訂正可能な誤り個数を主にして符号の設計が行われるが、提案する符号では通信路上の BER: p が事前に与えられれば、 p に合わせて最適な符号サイズ m を選択することができ、効率的に動作する符号が設計できる大きな特徴がある。

実際の通信路での使用に当っては、その符号が何重誤りの訂正能力をもつかよりもどれくらいの誤り発生確率まで訂正能力をもつかがより重要となる。このため本論文では、ポアソン分布に従って高い BER で誤りが発生する通信路における訂正能力を検討した。その結果、次元を大きくすると、確率的に誤り訂正を行う領域での訂正能力が高まってゆき符号の性能が向上すること、またこの場合の訂正能力の理論限界値が鎖符号のサイズ m によって決定され、限界の BER が $1/(2m - 1)$ で与えられることを幾何学的に明らかにした。

また、畳込み符号や RS 符号と高次元鎖符号との訂正能力をシミュレーションにより比較した。訂正能力の評価として、特に BER の高い領域で動作する符号に対し重要となるスレッシュホールド点、処理利得、誤訂正確率の三つを用いた。これらの比較から鎖符号は高い BER での誤り訂正に適しており、従来と異なる設計思想と動作機能に基づく高誤り率訂正符号であることが示された。

2. 復号法の提案

2.1 高次元鎖符号の構造と次元の関係

図 1 は、高次元鎖符号の一例として、次元 $n = 4$ 、

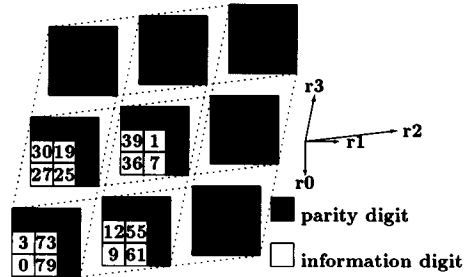


図 1 4 次元鎖符号の構成 ($m = 3$)

Fig. 1 Structure of four-dimensional ring code ($m = 3$).

1 辺のサイズ $m = 3$ の鎖符号を表現している。また、図 1 のなかの番号は符号の伝送順を示しており、各次元軸に対して斜め（対角線）方向に走っており、それらをたどっていくと符号の紐が全格子点を一筆書きで綴ってゆく離散的な高次元トラス構造上の結び目を構成している[5]。

4 次元鎖符号は次元数と同じだけの 4 方向に偶数パリティチェックを行う検査線 $r0 \sim r3$ をもち、それらは各々直交する方向に存在する。更に 4 次元鎖符号は、1 辺が m の正方形符号配列をした 2 次元鎖符号を一つのユニットとして m^2 枚（図 1 は 9 枚）の 2 次元鎖符号が多層化して構成されている。一般にサイズ m の n 次元鎖符号をある方向の 2 次元鎖符号に分割すると、 m^{n-2} 枚の 2 次元鎖符号に分割できる。

図 1 は、検査線 $r0 \sim r1$ で構成される 2 次元鎖符号で表現したが、4 次元鎖符号はこの方向の 2 次元鎖符号だけでなく、任意の 2 方向の検査線を選び出す総数 ${}_4C_2 = 6$ 方向の 2 次元鎖符号をもち、 n 次元鎖符号では ${}_nC_2$ 方向となる。

以上より、 n 次元鎖符号と 2 次元鎖符号の関係を考えると、 n 次元鎖符号は ${}_nC_2$ 方向に対してそれぞれ m^{n-2} 枚ずつの 2 次元鎖符号をもっている。これらの関係を図 2 に示し、鎖符号の具体的な構成例を表 1 に掲げる。

2.2 n 次元鎖符号の復号法

図 3 は、 n 次元鎖符号の復号法を示す。 $n = 3$ と $n \geq 4$ では一部アルゴリズムが異なるが、基本的なものは同じであるので図 3 においてまとめて説明を行う。

1 ステップ目における、 n 次元鎖符号を 2 次元鎖符号に分割するときの分割の順番は、特定の検査線方向が連続して含まれないよう 2 次元鎖符号の方向を選択する必要がある。これは、ある検査線に 2 個以上の誤

表 1 n 次元鎖符号の構成例
Table 1 Examples of n -dimensional ring code.

次元	サイズ	符号長	情報数	伝送速度	最小距離	枚数	方向	総数
n	m	m^n	$(m-1)^n$	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$	2^n	m^{n-2}	nC_2	$m^{n-2}nC_2$
3	3	27	8	0.296	8	3	3	9
	4	64	27	0.422	8	4	3	12
	5	125	64	0.512	8	5	3	15
4	3	81	16	0.198	16	9	6	54
	4	256	81	0.316	16	16	6	96
	5	625	256	0.410	16	25	6	150
5	3	243	32	0.132	32	27	10	270
	4	1024	243	0.237	32	64	10	640
	5	3125	1024	0.328	32	125	10	1250

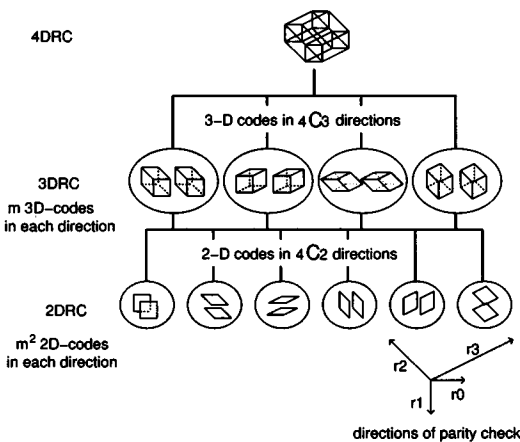


図 2 4次元鎖符号と2次元鎖符号の関係
Fig.2 Breakdown of four-dimensional ring code to two-dimensional ring code.

りが発生しているときに、その検査線を含む異なる二つの2次元鎖符号上で連続して誤り訂正を行っても、その検査線上の複数誤りは訂正されないためである。その検査線を含まない二つの2次元鎖符号による誤り訂正を行った場合、その検査線上の誤りが他方向より訂正される可能性がある。4次元鎖符号における望ましい訂正順序の例を以下に示す。

- 4DRC： $r_0-r_1, r_2-r_3, r_0-r_2, r_1-r_3, r_0-r_3, r_1-r_2$ 次に、2次元鎖符号における訂正法（2ステップ目）を説明する。 $m \times m$ の正方形符号配列上において水平方向 r_0i ・垂直方向 r_1j に ($0 \leq i, j \leq m-1$) それぞれ m 本ずつの検査線に関して偶数パリティチェックを行う。ある1個の誤りにより、

$$r_0i = r_1j = 1 \tag{1}$$

式 (1) を満たす検査線の添字 i, j が1組存在するとき、

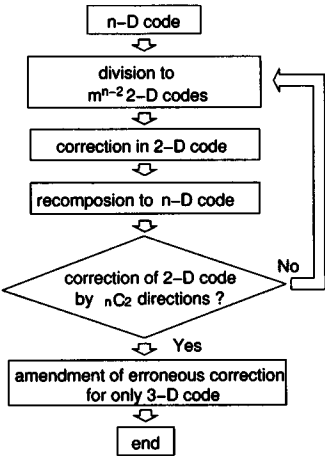


図 3 n 次元鎖符号の訂正アルゴリズム
Fig.3 Decoding algorithm of n -dimensional ring code.

2本の検査線で特定されるシンボルの訂正を行う。誤りが発生したシンボルは、式 (1) を満たす i, j を用いて、 m 進数 ji 、すなわち $m \times j + i$ で表すブロック番号である。なお、2次元面に2個以上の誤りが存在すると、誤りの特定による訂正は不可能となるので、何も処理を行わず他の方向からの誤り訂正に委ねる。

最後のステップは3次元鎖符号の場合のみ行われ、2次元符号上に誤りが3個存在する場合に確率的に生じる誤訂正の改善処理を行う。この処理は、1ビットの誤り訂正を行った2次元面を記憶しておき、面に直交する検査線を調べて訂正ビットを含む長方形に誤りが配置される場合、さきに訂正した誤りは誤訂正であることがわかるので、他の長方形の隅に配置される三つの誤りを含めて反転することで、誤訂正の修正と他の誤りの訂正が行われる。なお、4次元以上では、多

くの2次元面が存在するので、このような処理は行わない。

2.3 2次元鎖符号への誤りの均等分散効果

n 次元鎖符号の伝送方向は各検査線に対して対角線となっており、幾何構造的には n 次元上のトーラス結び目の構成をとるため、伝送路上の誤りは各2次元鎖符号へ均等に分散される[5]。2.2に検討した通り、各2次元鎖符号は1重誤りが訂正可能であるため、分散された誤り個数が1個以下となることが望ましい。従って、2次元鎖符号を用いた高次元鎖符号の誤り訂正能力を検討するには、この誤りの分散状況を検討する必要がある。また、ランダムな誤りかバースト的な誤りかによって、この分散状況が異なることも考えられるため、両方の場合について検討を行う必要がある。

符号のサイズ $m = 4$ の4次元鎖符号（符号長256）において4bitの誤りが伝送路上で(a)ランダムな位置に発生した場合と(b)連続する位置に発生した場合とについて、 10^6 ブロックのシミュレーションを行った結果を図4に示す。なお同図には、 $m = 4$ の2次元鎖符号中に、 $BER = 4/4^4 = 1.56 \times 10^{-2}$ と等しい確率でポアソン分布に従う誤りが発生した場合の理論値も併せて示す。

(a)のランダムに対する分散状況ではポアソン分布の理論式による計算結果と一致しており、4次元鎖符号上に発生したポアソン分布に従うランダム誤りは、2次元鎖符号上においてもポアソン分布的であることがわかる。また、(b)では誤り個数が1個となる場合の確率がポアソン分布の場合より幾分高くなるが、2個以上となる確率は逆に(a)の場合より低く、よって各2次元鎖符号上で誤り訂正が行われる確率が高い。これは(b)の場合には誤りの分布の偏りが高く、その分誤りのエントロピーが小さく加法的2元通信路容量がそれだけ高くなることでも理解される。

図5は更に誤りが増した場合として、26ビット($BER \approx 0.1$)の誤りがランダムに生じた場合と連続に生じた場合の2次元面への誤りの分配をしめす。良好な誤りの分散機能が知られ、図4と同様に連続誤りの場合には、3個以上の多誤りの生じる確率がランダムの場合より小さく、ランダム誤りより誤り訂正機能が高くなることわかる。

以上の結果より、高次元鎖符号においてバースト性の高い誤りはランダム誤りよりも高い確率で訂正される。高次元の場合のランダム誤りの訂正能力の上限は、バースト誤りの訂正能力に漸近すると考えられる。

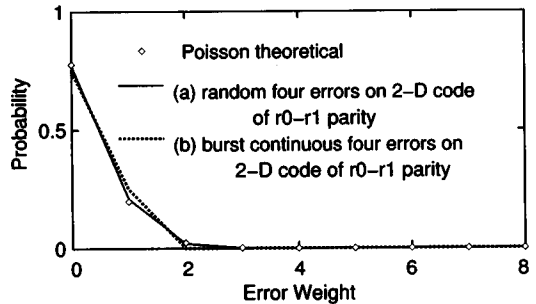


図4 4bit誤りが生じた4次元 $m = 4$ 鎖符号において、各方向の2次元鎖符号上に分配された誤り個数の生起確率

Fig. 4 Error distribution on 2-D of random error and continuous error of 4 bits out of 256 bits frame for 4D ($m = 4$) code.

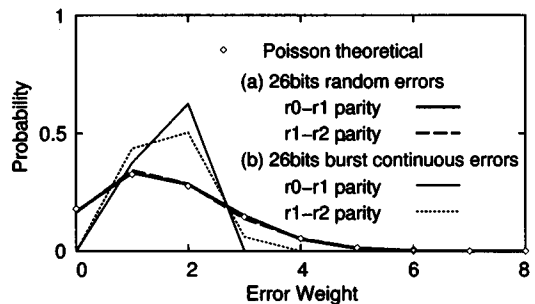


図5 26bit誤りが生じた4次元 $m = 4$ 鎖符号において、各方向の2次元鎖符号上に分配された誤り個数の生起確率

Fig. 5 Error distribution on 2-D of random error and continuous error of 26 bits out of 256 bits frame for 4D ($m = 4$) code.

2.4 計算量の評価

本論文で提案している復号法は、 n 次元鎖符号を大きさが $m \times m$ である $nC_2 \times m^{n-2}$ 枚の2次元鎖符号に分割するので、計算量は

$$\frac{1}{2}n(n-1)m^n \quad (2)$$

に比例する。但し、3次元鎖符号では最後に誤訂正の処理を行うため、計算量は式(2)に m^3 を加えたものとなる。しかしハードウェア化を考えると、1方向に存在する m^{n-2} 枚の2次元鎖符号の誤り訂正は並列処理が可能となるので、2次元鎖符号の符号長 m^2 に関する計算に必要な時間が訂正処理時間と考えることができる。従って、提案する復号法の訂正処理時間に

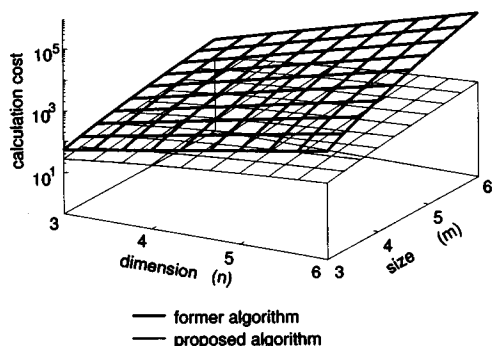


図6 訂正処理時間に関わる計算量の比較

Fig. 6 Comparison on the time for decoding process.

関わる計算量のオーダーは式 (3) となる。

$$\frac{1}{2}n(n-1)m^2 \quad (3)$$

一方、先に提案している復号法 [6] は、符号長と同じ大きさのシンδροームテーブル上において、検査線に基づいた重み付けを行って、誤り訂正を誤りが完全に訂正されるまでループ計算を行うものであり、計算量は式 (4) となる。

$$2 \times \text{loop} \times m^n \quad (4)$$

この loop 数は、次元・サイズおよび BER により 1～30 程度に変化するため、この値によって計算量も変化する。また従来の復号法では、並列化を行うことがアルゴリズム的に不可能であるので、式 (4) の計算に必要な時間がそのまま訂正処理時間となる。

図 6 では、式 (3) の結果と、式 (4) の loop 数を最小の 1 とした場合の結果を比較する。次元・サイズが小さい所では同じ程度の計算量となるが、次元やサイズが大きくなるにつれてその差は大きくなり、 $m=6$ の 6 次元鎖符号では loop 数を最小の 1 とした条件下においても約 10^2 の差が生じている。

今回提案する復号法の特徴は、BER にらず訂正処理時間が一定であることも有利であり、また専用ハードウェアによる並列化が可能であるため訂正処理時間の大幅な短縮が可能ながあげられ、先の復号法の問題点を解決できた。

3. 訂正能力に関する解析

3.1 誤訂正

鎖符号の各検査線は偶数パリティチェックを行っているため、ある 1 本の検査線に誤りが偶数個発生する

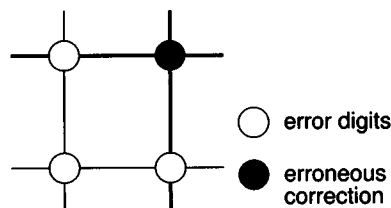


図7 誤り訂正不能形

Fig. 7 Undetectable pattern.

と誤り検出が不可能となる。また、図 7 に示すような形で誤りが 3 個 (○) 配置されると、図中の太線で示す 1 組の検査線でしか誤り検出が行われず、その結果、●で示すシンボルに誤りが存在すると判断し誤訂正が生じる。2 次元鎖符号上に発生した誤りが偶数個のときは、誤り候補点が必ず複数個存在するため訂正動作は行われず、よって誤訂正もされないが、3 個以上の奇数個の誤りのときのみ確率的に誤訂正が発生する [7]。一般に、5 個以上の誤りの発生確率は p^5 であり、 $p \approx 10^{-1}$ としても、 10^{-5} のオーダーとなり、2 次元面符号数 m^2 に対し、 $m^2 \times p^5 \ll 1$ となり、5 個の誤りの発生は充分小さい。よって、誤りが 3 個の場合が主要となる。すなわち、2 次元面において水平・垂直方向それぞれ 2 本ずつの検査線により作成される長方形の四つの頂点のうち 3 点に誤りが配置される場合にのみ誤訂正が生じ、そのパターン数は式 (5) で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{誤訂正パターン数} &= \{mC_2\}^2 \times 4C_3 \\ &= [m(m-1)]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

サイズ m が大きくなると 4 乗のオーダーでこのパターン数は多くなる。しかし、誤訂正の発生確率は式 (6) で与えられ、逆に m の 2 乗のオーダーで小さくなる。

$$\frac{\text{パターン数}}{\text{誤り総数}} = \frac{m^2(m-1)^2}{m^2C_3} = \frac{6}{(m+1)^2} \quad (6)$$

3.2 1 方向の 2 次元面誤り訂正による BER の改善量

訂正後の任意の 2 次元鎖符号 1 ブロックに残在する誤り個数の期待値 (λ と表記する) の上界 [8] を考えるため、ここでは悪い方の評価として 3 個以上の誤りの発生時には誤りを一つ増す誤訂正が 100% 起きるものと仮定する。通信路上の BER を p_0 ($0 \leq p_0 \leq \frac{1}{2}$) とすると、 λ は式 (7) で示され、次のように変形される。

$$\lambda < 2_{m^2C_2} p_0^2(1-p_0)^{m^2-2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=3}^{m^2} (k+1) {}_{m^2}C_k p_0^k (1-p_0)^{m^2-k} \quad (7) \\
& = 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \left[(1-p_0)^{m^2-2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=3}^{m^2} \frac{(k+1) {}_{m^2}C_k}{2 {}_{m^2}C_2 p_0^2} p_0^k (1-p_0)^{m^2-k} \right] \\
& = 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \left[(1-p_0)^{m^2-2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=3}^{m^2} \frac{k+1}{k(k-1)} {}_{m^2-2}C_{k-2} p_0^{k-2} (1-p_0)^{m^2-k} \right] \\
& < 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \left[(1-p_0)^{m^2-2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=3}^{m^2} {}_{m^2-2}C_{k-2} p_0^{k-2} (1-p_0)^{m^2-k} \right] \\
& = 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \left[(1-p_0)^{m^2-2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{m^2-2} {}_{m^2-2}C_k p_0^k (1-p_0)^{m^2-2-k} \right] \\
& = 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \sum_{k=0}^{m^2-2} {}_{m^2-2}C_k p_0^k (1-p_0)^{m^2-2-k} \\
& = 2 {}_{m^2}C_2 p_0^2 \\
& = m^2 (m^2 - 1) p_0^2 \quad (8)
\end{aligned}$$

誤り訂正が行われる 2 次元鎖符号の符号長は m^2 であるので、訂正後の BER を p_1 とすると $\lambda = m^2 \times p_1$ となり、式 (9) が得られる。

$$p_1 < (m^2 - 1) p_0^2 \quad (9)$$

$p_0 \neq 0$ より両辺を変形すると式 (10) になり、

$$\frac{p_1}{p_0} < (m^2 - 1) p_0 \quad (10)$$

上式が、1 方向の 2 次元鎖符号で行われる誤り訂正によって得られる BER の改善量を意味する。

3.3 n 次元鎖符号における BER の改善量

式 (10) から、 n 次元鎖符号における BER の改善量の上界を求める。

n 次元鎖符号に含まれる 2 次元鎖符号の BER 改善量がそれぞれ独立であると仮定すると、 n 次元鎖符号

($i = {}_nC_2$) の誤りの改善量は式 (11) で示される。

$$\frac{p_i}{p_0} = [(m^2 - 1)p_0]^i \quad (11)$$

実際には、各 2 次元鎖符号の BER の改善量には相関があるものと考えられ、その相関は検査線を共有するかしないかにより異なる。検査線を共有しない場合には、ほぼ独立である。

検査線を共有する場合について検討する。検査線 $r0-r1$, $r0-r2$ による二つの 2 次元鎖符号を順に復号するものとする、 $r0-r1$ の 2 次元鎖符号で訂正動作が起こった場合、 $r0$ 方向の 1 となる検査線の数が減少するため、 $r0-r2$ の 2 次元鎖符号では訂正動作が起こりにくく、検査線を共有する場合には復号後の BER は共有しない場合に比べ小さい。

従って、2 次元鎖符号の誤り訂正が i 回繰り返された後の BER を p_i とすると、式 (11) より n 次元鎖符号 ($i = {}_nC_2$) の誤りの改善量は式 (12) で示される。

$$\frac{p_i}{p_0} < [(m^2 - 1)p_0]^i \quad (12)$$

従って、BER の上界は式 (13) になる。

$$p_i < [(m^2 - 1)p_0]^i \times p_0 \quad (13)$$

式 (13) は、次元を上げて 2 次元鎖符号における誤り訂正回数 i を多くすると、 $(m^2 - 1)p_0 < 1$ を満たす場合、訂正後の BER がゼロに収束することを示す。 $(m^2 - 1)$ を 2 次元鎖符号の符号長 m^2 とほぼ同じと考えると、通信路上の BER に対し 2 次元鎖符号面に存在する誤り個数が平均 1 個未満となるように設計すれば、正復号率は 1 に近づくことを意味している。

図 8 には、訂正回数 i が 3 となる 3 次元鎖符号の復号後の BER の理論値と、計算機シミュレーションの

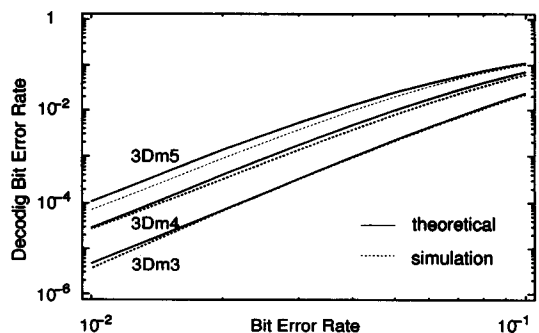


図 8 近似曲線とシミュレーション値
Fig. 8 Approximate value vs. simulation result for decoding bit error rate of three dimensional code.

結果を比較する。おおむね良く一致する。ここで、式(13)で与える訂正後の近似 BER は、近似のため大きな値を与えるので、図8の理論値として、2次元面の1個誤りは完全訂正とし、3個以上の奇数個誤りは100%誤訂正により1個誤りを増加させるとして求めた結果を示す。なお、式(13)による値と上の理論値を $p_0 = 0.042$ ($m=5$, $(m^2-1)p_0=1$) の点で比べると、近似式は2倍強の値を示す。なおまた、 $(m^2-1)p_0 > 1$ なる領域では、誤り率が訂正処理でかえって増加する可能性があるが、図8, $m=5$ の場合では 8×10^{-2} 程度より劣化することが知られる。

4. 高次元鎖符号の性能評価と設計

4.1 計算機シミュレーション

以下に示すシミュレーションはサンプル数を 10^6 ブロックとしている。訂正可能率は 10^6 ブロックに対して何ブロック訂正可能であったかのブロック訂正率を示し、訂正不能率も同様に定義する。

4.2 高次元鎖符号の性能評価

図9は、3次元、4次元鎖符号の誤り個数に対するブロック当りの訂正能力(確率)を示す。各々の鎖符号とも、誤り重みに対しある点を境として急激に訂正不能率が減少する。この点は符号の最小距離から計算される誤り訂正個数に対応しており、これよりも誤り個数が多いときの訂正は確率的に行われ、次元数に比例して確率訂正の領域が大きくなる。

図9より m を一定とすると、3次元・4次元の鎖符号とも同様な曲線で、誤り重みの割合と共に訂正不能率が増加する。一方、次元 n を一定とすると、訂正不

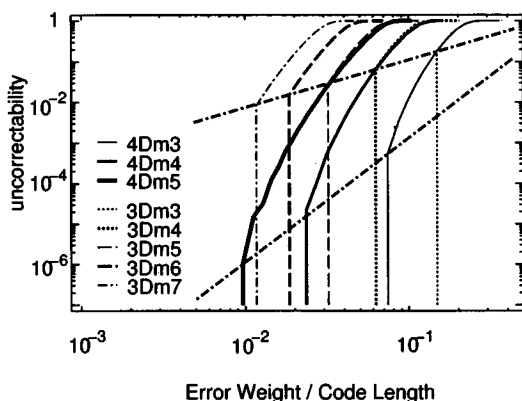


図9 高次元鎖符号の基本性能

Fig.9 Basic performance of n -dimensional ring code.

能率が急激に低下する点が図9の太1点鎖線で示すよう次元ごとに、ほぼ直線上に存在する。これらを考慮すると、図中では示されていない $m=6,7$ の4次元鎖符号の特性も類推することが可能となる。

図10は、1ブロックに誤りを均一に発生させ、その誤り個数を符号長で割った値と復号後の BER の関係を示し、参考文献[9]の結果と鎖符号の結果を重ねたものである。復号後の BER が 10^{-4} 以下では、 $m=4$ の5次元鎖符号 ($R=0.237$) は伝送速度が $R=1/4$ に近い畳込み符号とほぼ同等かそれ以上の訂正能力をもっている。実際、回線の BER に対する復号後の BER (処理利得) をみると、 $m=4$ の5次元鎖符号は BER のほぼ11乗に比例するのに対し、 $R=1/4$ の畳込み符号は約9乗に比例するので、鎖符号の方が誤り改善量大きい。また復号後の BER が 10^{-2} より高い領域においては、 $m=6$ の4次元鎖符号 ($R=0.482$) と $R=1/4$ の RS 符号は同等な訂正能力(どちらの符号も処理利得は約6乗)をもつので、伝送速度の点において $m=6$ の4次元鎖符号は $R=1/4$ の RS 符号より約1.93倍優れていると言える。

次に各誤り訂正符号の訂正能力が機能する限界の BER について比較する。復号後のビット誤り率が改善される限界点は、図10の1点鎖線との交点で与えられる BER で、以下、スレッシュホールド点と呼ぶ。 $m=3$ と $m=4$ の5次元鎖符号はスレッシュホールド点がそれぞれ0.32, 0.23であるのに対し、畳込み符号は

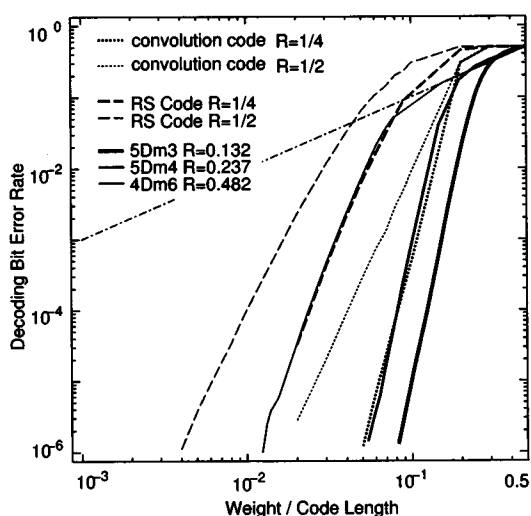


図10 復号後のビット誤り率の比較

Fig.10 Decoding bit error rate vs. error rate.

$R = 1/4, 1/2$ ともにほぼ 0.14, RS 符号は $R = 1/4$ では 0.09, $R = 1/2$ では 0.04 となり, 鎖符号の方が他の符号に比べ高い BER でも有効に動作することがわかる。また鎖符号では, スレッシュホールド点より回線の BER が悪化しても, 復号後の BER は回線の BER とほぼ同等な値に留まるが, 他の二つの符号では, スレッシュホールド点を少しでも上回ると復号後の BER は大幅に悪化し, 誤訂正確率が高くなる。従って, 鎖符号の方が動作点をスレッシュホールド点近くに設定できるため, 鎖符号は動作のダイナミック範囲が広く, 高い BER における誤り訂正に適した符号となり, 優れた性能をもつ。

図 9, 図 10 は, 1 ブロック中の誤り個数を均一に発生させて性能評価をしたが, 実際の通信路上では誤りの発生は各ブロックごとに均一ではなく, 誤り重みがブロックごとに変動する。そこで以下では, 誤りが発生する状態をポアソン分布 (ポアソンチャネル) に従うと仮定した検討を行う。

図 11 は, 次元 n を 3~7 まで変化させた $m = 4$ の鎖符号の訂正能力を示す。復号誤り特性は次元数 n が大きくなるほど急しゅんになり, ステップ状となる。このとき, カーブの下側はほとんど変化しないことから, カーブの下端の BER が高次元鎖符号により誤り訂正が行われる可能性のある BER の上限であると考えられる。また, 上端の BER は高次元鎖符号により 100% の確率で誤りが訂正される最高の BER を示している。この二つの BER を式として表すことを考える。

4.3 幾何学的に示される訂正能力

2 次元鎖符号上であるビットの誤り訂正が正しく行われるためには, 少なくともその誤りを含む水平・垂

直の検査線上の $(2m - 1)$ 個の符号ビットに他の誤りが存在してはならない。この条件は誤り訂正が正しく行われる十分条件ではなく, 同じ条件で 2 次元面に複数の誤りが発生すると訂正できない場合が生じることは先の 2.2 に検討した通りであるが, 高次元鎖符号では多くの方向の 2 次元面から訂正が行われるため, そのような場合もすべて訂正されると考えられる。従って, 高次元鎖符号により誤り訂正が行われる可能性のある BER の上限値 p_u は m により $p_u = \frac{1}{2m - 1}$ と定まる。

また, 2 次元鎖符号面において, 100% の確率で誤りが訂正されるのは各符号面で誤りが 1 個以下の場合であるから, 高次元鎖符号としての 2 次元的機能が発現してゆく可能性のある BER の下限値 p_l は $p_l = \frac{1}{m^2 - 1}$ (3.3 参照) となる。

よって, 通信路のポアソンチャネル誤り率 p が $p_l < p < p_u$ の領域では, 誤り訂正は確率的なものとなるが, 次元が高いときその確率はほぼ 100% となり, 高次元鎖符号が高い訂正能力をもつことが示された。最小距離に基づく訂正能力の評価からすると, その領域は訂正不能領域とみなされるが, 実際の訂正能力は最小距離から導出される限界よりはるかに大きい。このことが幾何学的高次元構造に基づく訂正を行う本符号の特徴である。一般に, n 次元鎖符号の最小距離は 2^n であり, 訂正できる誤り個数 t は式 (14) で与えられる。

$$t = \left\lfloor \frac{2^n - 1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1 \quad (14)$$

また, 符号長は m^n であることより, 距離限界に対応する訂正可能な BER は式 (15) となる。

$$\text{BER} = \frac{2^{n-1} - 1}{m^n} \quad (15)$$

図 12 は, 式 (15) に $3 \leq n \leq 6$, $3 \leq m \leq 7$ を代入した結果と, 図 11 で示した確率訂正を行うポアソンチャネルの誤り率 $\frac{1}{m^2 - 1} < p < \frac{1}{2m - 1}$ を重ねた結果である。実際のポアソンチャネルで評価してみても, 距離限界から求められる特性より数段高い BER まで動作することがわかる。高次元の鎖符号ほど優れた特性が得られ, 次元数が十分大きい場合, ポアソンチャネル誤り率が $\frac{1}{2m - 1}$ によって誤り訂正の限界が与えられる。

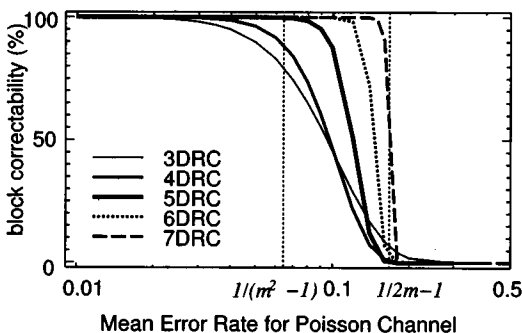


図 11 通信路上での訂正能力 ($m = 4$)

Fig. 11 Expected correctable rate per block vs. channel error rate for size $m = 4$.

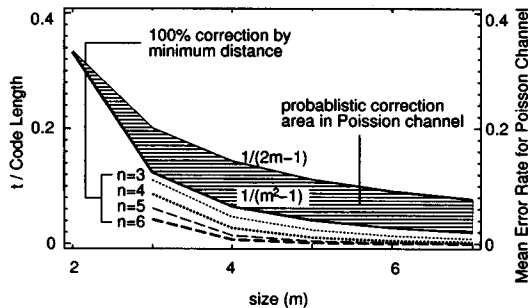


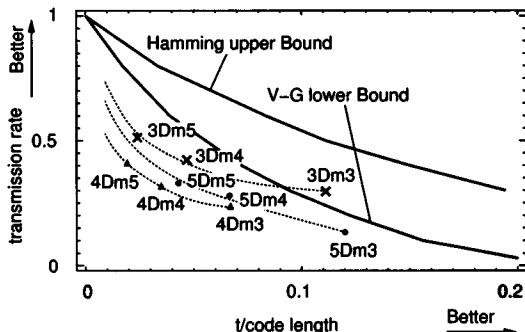
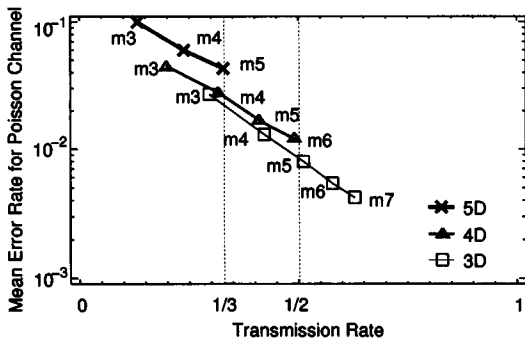
図 12 鎖符号の訂正領域

Fig. 12 Correctable range of n -dimensional ring code.

4.4 符号の設計、チャネル誤り率と符号のサイズと次元の関係

図 13 は、ブロック訂正可能率が 99.9%となる誤り個数を t として誤り訂正個数と伝送速度の関係を表す Varsharmov-Gilbert lower Bound, Hamming upper Bound と対比し高次元鎖符号の性能を検査している [10], [11]。なお鎖符号の場合は、通信路の平均誤り率による符号の設計を行うため、より現実の使用に近い設計となるが、誤り個数に基づく符号に対して与えられた図 13 の限界との比較は平均を越える誤りの発生が確率的に存在しているので、訂正能力上、提案符号に対してより厳しい評価となっているが、あえて示している。図 13 から、符号長が短い $m = 3$ の 3 次元鎖符号が誤訂正処理を行っていることもあり、最も効率的に動作することがわかる。しかし、高い BER の環境においては、誤り訂正特性の方が効率より優先されることもあり、その場合には、 $m = 3$ の 5 次元鎖符号若しくは更に次元の高い鎖符号を使用することが望まれることがある。

図 14 は n 次元鎖符号の伝送速度と通信路上の BER の関係を示している。表 1 で示したように伝送速度は m, n の値より一意に決定される。伝送速度を一定とすると次元・サイズの異なる複数の適用符号が存在し、次元の高い鎖符号を選択すれば、通信路上の BER がより高い領域において誤り訂正を行うことができる。しかし、誤り訂正に要する時間も考慮の対象となる。次元 n やサイズ m が大きくなると、一般的に検査線の本数が多くなり符号の構造が複雑化するので、訂正処理時間が増大する。実際に伝送速度が約 1/3 となる鎖符号を用いた場合の 1 ブロック当たりの訂正処理時間を各次元ごとに Sun Microsystems, Inc. の SPARC station ELC を用いて測定すると、符号長 3125 ビット

図 13 ブロック誤り率 = 10^{-3} のときの誤り個数と伝送速度の関係Fig. 13 Error weight vs. transmission rate when expected uncorrectable rate per block is 10^{-3} .図 14 ブロック誤り率 = 10^{-3} のときの通信路上の誤り率と伝送速度の関係Fig. 14 Channel error rate vs. transmission rate when expected uncorrectable rate per block is 10^{-3} .

の $m = 5$ の 5 次元鎖符号は約 19 ms、符号長 256 ビットの $m = 4$ の 4 次元鎖符号は約 1.0 ms、符号長 27 ビットの $m = 3$ の 3 次元鎖符号は約 0.11 ms であるから、ビット当たりの処理時間でみると、大きな差がなかった。専用ハードウェアを作成することで、更に高速化が期待される。

高次元鎖符号は次元 n やサイズ m を変化させることにより、通信路上の BER や伝送速度に対して好適な符号を用いる自由度があり、効率的な誤り訂正の適用が可能となる。

5. む す び

本論文では、2 次元鎖符号を基本とした高次元鎖符号の新たな復号法を提案した。これは、先に提案された復号法の問題点を解決し、高い BER において高速で効率的に動作することができる。また、畳込み符号

や RS 符号と性能比較を行うと、鎖符号の方が高誤り率の領域でより良好な性能をもつことが明らかになった。また符号の設計条件について、従来の符号は訂正される誤り個数に主眼がおかれるが、BER が高い場合には、通信路上の BER を主体に設計される必要がある。今回提案している符号方式は、通信路上の BER に合わせて設計サイズを決定できる特徴を有しており、かつ伝送速度とあわせて好適な符号が設計できる次元 n とサイズ m の自由度をもっている。

基本となる 2 次元鎖符号は単一誤り訂正のみを行えばよく、これで不足する訂正能力は高次元符号に内在する他方向からの 2 次元面上での訂正によって補なわれる。従って、次元が高い場合の訂正能力は 2 次元面における単一誤り訂正能力のみでほぼ決定され、この上限式は容易に幾何学的に理解される。この符号の訂正能力は距離限界によるのではなく、その限界を数倍以上に越えることがわかった。ポアソン通信路の BER に対する訂正能力の上限は $p = \frac{1}{2m-1}$ で与えられ、誤り訂正に対する新たな幾何学的な符号構成の意味づけが与えられた。

また、フェージングのある回線での性能評価についても、誤り率の高い領域で一般の符号より誤訂正が極めて少ないため良好な性能を示すが、別に検討する。更に符号の具体的構成と実現については今後の課題である。

文 献

- [1] S. Lin and D.J. Costello, Error Control Coding, Prentice-Hall, 1982.
- [2] 笠原正雄, “復号アルゴリズムの動向,” 信学論 (A), vol.J73-A, no.2, pp.196-202, Feb. 1990.
- [3] 畑 雅恭, “鎖符号, 新しい形式の疑似巡回符号—バースト誤り訂正と暗号符号化—,” 第 6 回情報理論とその応用シンポジウム, 1983.
- [4] S. Kuroda, M. Hata, “Decoding algorithm of high-dimensional ring code,” International Symposium on Information Theory and Its Applications, Sydney, Nov. 1994.
- [5] 畑 雅恭, 橋本和憲, 武田成史, “高次元対称符号の形成とトポロジーに関する考察,” 信学技報, ISEC 91-23, 1991.
- [6] 橋本和憲, 畑 雅恭, “高誤り率 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ において良好なランダム誤り訂正能力を有する高次元対称パリティチェック符号,” 信学論 (A), vol.J75-A, no.8, pp.1257-1265, Aug. 1992.
- [7] 野田忠義, 畑 雅恭: “鎖符号の提案—鎖符号の対称性と訂正不能問題—,” 信学論 (A), vol.J73-A, no.2, pp.243-252, Feb. 1990.
- [8] W.W. Peterson and E.J. Weldon, Jr., Error-Correcting Codes Second Edition, THE MIT Press, Cambridge,

1972.

- [9] T. Sato, M. Kawabe, T. Kato, and A. Fukasawa, “Evaluation results for group 3 facsimile transmission over the digital cellular system using the transparent mode,” IEICE Trans., vol.E74, no.10, pp.2990-3000, Oct. 1991.
- [10] 今井秀樹, 符号理論, 電子情報通信学会, 1990.
- [11] 宮川 洋, 岩垂好裕, 今井秀樹, 符号理論, 昭晃堂, 1973.
(平成 9 年 1 月 30 日受付, 6 月 23 日再受付)



黒田 慎一 (正員)

平 5 名工大・工・電気情報卒, 平 7 同大学院博士前期課程了。現在三菱電機に勤務。在学中, 誤り訂正符号の研究に従事。



山口 栄作 (正員)

平 5 豊橋技科大・工・知識情報卒, 平 7 同大学院修士課程了。同年より名工大知能情報システム学科助手。誤り訂正符号の研究に従事。



内匠 逸 (正員)

昭 57 名工大・工・電子卒, 昭 59 同大学院修士課程了, 昭 60 同大助手。現在, 同大知能情報システム学科助教授。デジタル通信, 適応信号処理の研究に従事。工博, 電気学会, 計測自動制御学会各会員。



畑 雅恭 (正員)

昭 33 名工大・工・電気卒。同年沖電気入社。以来デジタル通信方式, 電子回路応用, ミリ波通信機の研究開発に従事。昭 60 より名工大電気情報工学科教授としてデジタル信号処理, 情報通信の研究に従事。現在知能情報システム学科所属。工博 (東工大)。