

大変形領域での材料構成則パラメータの同定方法について

An Alternative Experimental Method to Determine Elasto-Plastic Material Parameters in Large Deformation

小畑 誠*, 水谷 明嗣**, 後藤 芳顯***

Makoto OBATA, Akitsugu MIZUTANI, and Yoshiaki GOTO

*Ph.D. 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

**名古屋工業大学大学院生 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

***工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

The objective of this work is to propose a new experimental method to amend the current shortcomings regarding the determination of material parameters with the aids of FEM-based inverse analysis. The outline of the proposed method is as follows. In uni-axial tension test, we use a non-standard specimen that allows non-uniform deformation. Instead of strain, we measure displacement between appropriate two points together with external load. So obtained load-displacement curve indirectly reflects all the consequences of multi-axial plastic deformation. Then, we apply FEM-based inverse analysis to obtain the material parameters to reproduce the closest load-displacement curve to the observed one. This method provides a consistent way to determine the material parameters by a simple uniaxial test.

Key Words: *constitutive relation, plastic fracture, elasto-plastic analysis, inverse analysis*

1 はじめに

先の阪神淡路大震災では構造物が多くの被害を受けたが、そこではあらためて耐荷力だけではなく変形能を正しく評価することの重要性があらかになった。これらの状況から耐震設計を考えたときに鋼構造物の性能に対する要求はより高度になってきている。したがって設計を支援する数値計算もより厳密なものが要求され、それらは必然的に幾何学的非線形性と材料非線形性の二つをともに考慮したものでなければならないという状況になりつつあると思われる。これまでこのような高度な数値解析の積極的な利用に対する障害となってきたのは、非線形解析の利用自体が研究室レベルのものであったことと大規模な数値計算を行う計算機インフラストラクチャが整備されていなかったことである。このうち計算機インフラストラクチャについてはマイクロプロセッサのこれまでの驚異的な発展と今後 10 年間は同じベース以上での進歩が期待できることにより制約はかぎりなく小さくなりつつあると言える。一方、非線形解析のうち幾何学的非線形性を考慮することについては過去 30 年以上にわたり広範かつ精力的な研究が行われており高精度の非線形計算が実用的なレベルで利用可能な状態にある。事実、現在では一般的な汎用有限要素法パッケージなどを用いれば比較的容易に幾何学的非線形性を考慮した解析を行うことができる。

その一方で材料非線形性を扱うことに関しては幾何学的非線形性に比較してある意味ではほとんど進歩して

いないというのが現状である。鋼構造に関する限り問題は鋼材の塑性を扱うことに集約されることになるが、実際に現在使われている圧倒的多数の塑性理論はその基本的枠組みに置いて J2 流れ理論に等方硬化則と移動硬化則を組み合わせたものにとどまっている。上にも述べた汎用有限要素法パッケージにおいても利用可能なものはきわめて初歩的なものにすぎない。ところがこれらの単純な理論が構造物の延性破壊や脆性破壊を扱わなければならない大変形領域においてしばしば十分なものではないことは既に知られている事実である。例えば、き裂の発生につながるようなひずみの集中化には材料塑性構成則が深く関わっているが、歪みのないなめらかな降伏曲面を前提とする通常の J2 流れ理論ではこのような現象を解析することは困難なことが多い^{1,2)}。また微視的な観点からも変形に伴う降伏曲面の歪みは当然の帰結であり大ひずみ領域での単純な J2 流れ理論の適用には疑問符が付く。現象学的な立場からではなく微視的な観点からより厳密に塑性論を構成することも可能ではあるが現在の計算機のインフラストラクチャでは、また予想できる範囲の将来にわたっても微視的な塑性論を構造物レベルの解析に直接適用することは実用的ではないものと思われる。したがってその精度に問題を抱えながらも J2 流れ理論に基づく現象学的理論は実用的な数値解析に適用可能なほとんど唯一のものであると言える。このため、多くの研究者がまさに研究者ごとの一般理論を提案してきているのが現状である³⁻⁶⁾。先に述べたようにこれま

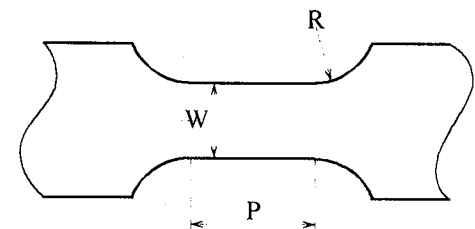
で提案されている理論の大多数は J2 流れ理論に基本をおき一軸挙動の正確なカーブフィッティングを目的にして特殊な材料パラメータを導入したものである。実際の鋼材の挙動は非常に複雑なのでその挙動を再現するためには多くの材料パラメータが必要になり、必然的に表現も複雑になってきている。このような現状から適用目的を限定したうえでなるべく簡略な構成則を提案するという新しい動きもある⁷⁾。多くの材料パラメータを導入し表現が複雑であったとしてもそれが材料の挙動を的確に表すものであればよいが、実際には次のような問題がある。ひとつは多軸応力状態への拡張は J2 流れ理論によっているので、載荷経路が一軸状態から大きくはずれるような場合には精度の低下は避けられない点である。変形の小さい範囲での土木構造物の挙動を解析する程度であれば構造物のどの箇所をとっても載荷状態はほとんど比例載荷状態になるのでこれは重要ではないが、終局状態を考慮するためにはクリティカルになる。もうひとつは現象学的塑性モデルに含まれる材料パラメータの同定法である。これらのパラメータのほとんどは明確な物理的意味を持たないため実験によるそれらの同定法が必ずしも自明ではないことである。材料パラメータは本来多軸応力試験を行い決定するのが望ましいが、実験の困難さと一軸挙動のカーブフィッティングに基づく理論構成もあり現状では一軸試験による同定を行っている。さらに問題なのは大きなひずみの領域を適用範囲としなければならないにもかかわらず、供試体の一様変形を前提とした通常の実験法で観測できるのはせいぜい 20%程度のひずみ領域にすぎないという点である。標準試験体で一様変形が期待できないような大変形領域における弾塑性挙動に関する材料定数の同定法は現在のところ確立されていないと考えて良い。ところが先にも述べたように材料の破壊という問題に関しては 30%以上の大変形領域での材料挙動が重要となる。したがって、これまで提案されてきた塑性理論は構造物の終局挙動を解析するのに要求される多軸応力状態や大変形領域では実験による厳密な検証をへたものではないと言える。塑性理論の基本的枠組みが単純でありながら材料挙動が複雑であるという事実は、弾塑性構成方程式の現時点における大きな問題の一つが材料パラメータの同定にあると言っても過言ではないことになる。

本論文の目的は既にもう十分に数多い塑性理論に対して新たな改良理論を付け加えることではない。塑性理論において的確な内部変数の表現方法の研究が重要であることは言うまでもないが、上に述べたように直接的で信頼性のある検証方法による裏付けのない現在の状況で既存の一般的な理論の改良を行う、あるいは行おうとすることには大きな価値は認めにくい。ここでは、材料挙動を表すのに必要な材料パラメータの、とくに高度な非線形解析には不可欠な大変形領域における同定方法について標準試験体とひずみゲージを用いた方法に替わる一つの方法を提案することを目的とする。これにより、これまで提案されてきた構成則モデルのより直接的な検証

も可能になる。また信頼できる検証方法はより精度の高い構成則モデルの構築に対しても有用である。

2. 提案する同定法の概要

まず図 1 にあるような標準試験体を使う材料実験について考える。ヤング率やポアソン比を決定する試験法としては既に確立された手法であるひずみゲージを貼付し一軸引張り試験を行うことになるが、このような方法が前提としているのはひずみゲージを貼付した断面付近において一様な変形が生ずるということである。しかしながら近年の緻密な弾塑性構成モデルに含まれる多数の材料パラメータの同定に対しては標準の手法は少なくとも以下の点で問題がある。一つは破壊を含む構造物の終局挙動にかかわってくる可能性のある大ひずみ領域では適用できないことであり、もう一つは多軸応力非比例載荷を想定した試験ができないことである。前者の問題は、理想的な試験体であっても一様変形を期待できるのはせいぜい最大荷重点付近までであり、それ以降はくびれが生じることにより一様変形状態ではなくなることによる。通常の鋼材では標準試験体の最大荷重点は 20～30%の伸びひずみで生じるので標準の方法で応力ひずみ関係を推定することができるのはこの程度ということになる。また圧縮載荷に対しては座屈により一様変形を期待できるひずみの範囲はより狭い。後者の非比例載荷多軸応力状態については塑性モデルを考える上では是非検証しておくのが望ましい。多軸載荷は特別な試験機を



W=25mm, P>50mm, R>15mm 厚さは元のまま
図 1 平板標準供試体の一例 (5 号試験片)

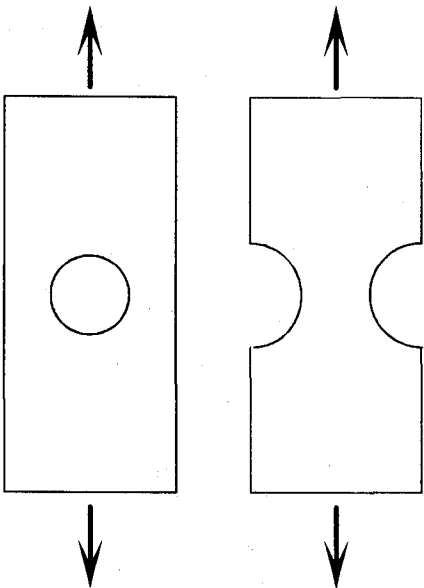


図 2 提案する供試体の例

用いれば対応は不可能ではないが試験そのものが難しいことは容易に想像できる。

このような問題に対する一つの回答として、より高価で緻密な試験機によるのではなく、通常の試験機を用いながらも近年の非線形数値解析の支援環境と変位測定技術の進歩を利用し逆解析を用いた実際的な手法を考える。材料パラメータを逆解析により求めることはコンクリートの引張り軟化曲線の推定等で広く行われてきており基本的な考え方は同じである。また手法や観点は若干異なるようであるが以下と同様の考え方はごく最近 Aoki⁸⁾らや Mahnken and Stein⁹⁾なども提案している。まず試験体としては一様変形を想定しないものを用いる。ノッチや孔などの応力集中部を持つものなど(図2)などがその例である。次に、この試験体を一軸材料試験機により載荷し、適当に選んだ標点間の変位を測定する。すると試験体は一様変形しないので測定した変位には、全体としては比較的小さい変形であっても標準試験体では実現しにくいような大きな変形領域でのしかも一軸引張り試験でありながら多軸応力状態での応力ひずみ関係が理論的には反映されていることになる。次にコンクリート材料等で引張軟化曲線を推定するために行われているように¹⁰⁾非線形有限要素法解析を用いた逆解析により測定した変位から想定した塑性モデルの材料パラメータを決定する。つまり通常の一軸試験機を用いながら大変形と多軸応力実験を行ったことに相当する。想定した塑性モデルが非比例載荷経路を含む大ひずみ状態で妥当なものでありかつ非線形数値解析法としての有限要素法が信頼できるものであれば、提案する手法による材料パラメータの同定は正当化される。実際問題として非線形数値解析法としての有限要素法の精度は信頼できるものになし得るので、この同定法は想定した塑性モデルの簡単な検証法にもなる。また見方を変えれば、想定した塑性モデルが有限要素法に使用されることを前提とするならば、こうして決定された材料パラメータが、少なくとも材料レベルでは最も適切なものであると考えることもできる。また当然ではあるがこの手法は単調載荷だけでなく繰り返しに対しても適用可能である。

次に、提案する手法を実現するためのいくつかの具体的な方法について述べる。まず変位の測定であるがこれは最も簡単には破壊力学試験等に用いられるクリップゲージ等を使用することにより可能である。あるいは画像処理を用いた変位計測法であれば観測点の選択等については自由度が大きいので望ましいと思われる。一方、有限要素法解析にもとづく逆解析についてはいくつかの可能性が考えられる。強度に非線形な問題であるが、単純なガウス=ニュートンを用いる方法、あるいはカルマンフィルタ⁸⁾、ニューラルネットワークやGA等の適用も可能である。一般的には収束性やロバスト性等を考慮して考えるのが望ましい。本論文では、提案する手法自体の適用性を議論するために、単純で幅広く用いられているガウス=ニュートン法を適用する。

まず、想定する構成則モデルが ℓ 個の材料パラメータ $p_k(k=1, \dots, \ell)$ を含んでいるものとし、このすべてを決定する問題を考える。これは、ある適当な観測点における非線形有限要素法による数値解析により得られる荷重変位曲線と実験における観測値が最もよく一致するように材料パラメータを決定する問題になる。そこで規範としては通常の最小2乗規範を用いる。すなわち $w_i(i=1, \dots, m)$ を観測点における変位としてその変位における荷重の観測値を P_{Ei} 、計算値を P_i とする。するとこれを用いて誤差関数 W は

$$W = \sum_i (P_{Ei} - P_i)^2 \quad (1)$$

と表すことができる。ここで P_i は材料パラメータ p_k の関数であり形式的に

$$P_i = P_i(p_1, \dots, p_\ell) \quad (2)$$

と表すことができる。しかしながら、あきらかなように $P_i(p_1, \dots, p_\ell)$ は材料パラメータ $p_k(k=1, \dots, \ell)$ の陽な関数ではないから式(1)をこのままの形で解析的に扱うことは不可能である。そこでこのような困難を避けるために P_i を真値に近いと思われる材料パラメータ値 $p_i^0(i=1, \dots, \ell)$ のまわりで線形化することを考える。すると式(1)は以下のように表すことができる。

$$W = \sum_i \left(P_{Ei} - P_i(p_1, \dots, p_\ell) - \sum_n \frac{\partial P_i}{\partial p_n} \Delta p_n \right)^2 \quad (3)$$

W を Δp_n の関数と見なして W が極小値となる必要条件は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W(p_1, \dots, p_\ell)}{\partial (\Delta p_j)} \\ &= -2 \sum_i \left(P_{Ei} - P_i(p_1^0, \dots, p_\ell^0) - \sum_n \frac{\partial P_i}{\partial p_n} \Delta p_n \right) \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで式(4)から Δp_i を解けば、 Δp_i は $p_i^0(i=1, \dots, \ell)$ に対して式(1)で表される規範に関する最もよい修正値になる。そして修正された $p_i^0(i=1, \dots, \ell)$ に対して同じ操作を繰り返していくと、初期値 $p_i^0(i=1, \dots, \ell)$ さえ適当であれば式(3)を十分な精度と満足する $p_k(k=1, \dots, \ell)$ が得られることになる。ただし P_i が材料パラメータの陽な関数でない以上、式(4)に含まれる $\frac{\partial P_i}{\partial p_j}$ は数値微分等の手法によらなければならないことに

注意する。以上の手順をフローチャートにまとめると図3のようになる。

3. 数値計算例

提案する方法の概略は上に述べたとおりであるが、実験による検証を行う前段階として、本研究では数値実

験により以下の点について検討する。すなわち想定した供試体の形状と構成方程式に対し変位を観測する点の有効な位置および実際のガウス＝ニュートン法の適用等に関する問題点である。

3.1 単純なべき乗硬化則の係数の同定

まず最初の検討例は塑性硬化則として次式で表すことのできる簡単な等方硬化則の場合である。

$$\sigma = h(\epsilon^p + \alpha)^n \quad (5)$$

有限変形問題を考えるので上式で σ は真応力、 ϵ^p は対数ひずみとする。 α は初期降伏応力 σ_Y^0 とヤング率 E を使って以下のように与えられる。

$$\alpha = \left(\frac{\sigma_Y^0}{E} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6)$$

ヤング率、ポアソン比、初期降伏応力といった量は従来の方法で容易に決定することができるのでここでは $E/\sigma_Y^0 = 833.3$, $\nu = 0.3$ として与えた。同定する量は加工硬化係数 h とべき数 n である。仮想供試体としては図4(a)に示すような楕円孔を含む板とし、長手方向に単調載荷する場合を考えた。擬似的な実験値としては $h/\sigma_Y^0 = 3.125$, $n = 0.25$ の場合の数値解析結果に観測誤差を想定し乱数により最大5%の相対誤差を付加したものとした。図4(a)の点QQ'と点RR'の変位を観測し、提案する手法を適用するものとした。有限要素法解析は

x, y, z それぞれの方向に関する対称性を考慮し全体の8分の1の部分に対し図4(b)に示す要素分割で行った。板厚方向の要素数は1であり使用した要素は3次元20節点の6面体要素である。境界条件としてはAA'を通り xy 平面に平行な平面で x, y 方向の拘束をせず z 軸方向の変位を与えた。解析コードにはABAQUS Ver. 5.6⁽¹⁾を使用し、いくつかの要素分割に対して荷重変位曲線が十分に収束していることを確認した。

この場合、式(4)は具体的には次のようになる。

$$\frac{\partial W}{\partial (\Delta h)} = -2 \sum_i \left(P_{Ei} - P_i^0 - \frac{\partial P_i}{\partial h} \Delta h - \frac{\partial P_i}{\partial n} \Delta n \right) \frac{\partial P_i}{\partial h} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial (\Delta n)} = -2 \sum_i \left(P_{Ei} - P_i^0 - \frac{\partial P_i}{\partial h} \Delta h - \frac{\partial P_i}{\partial n} \Delta n \right) \frac{\partial P_i}{\partial n} \quad (7b)$$

ここで P_i^0 は適当に選んだ初期値 h^0 と n^0 に対する P_i である。先にも触れたようにガウス＝ニュートン法を適用

するにあたっては式(7a,b)に含まれる微係数 $\frac{\partial P_i}{\partial h}$ と $\frac{\partial P_i}{\partial n}$

を評価する必要がある。これをすべて直接的な数値微分によるとすると収束にいたるまでに必要な有限要素法による数値解析量がかなり多くなる可能性がある。そこでここでは全体としての計算効率をあげるために内挿関数による方法を用いることにする。この方法では真値を探索する領域であらかじめいくつかの h と n の組み合わせに対して $P_i(h, n)$ を計算しておき、式(7a,b)に必要な量についてはすべて内挿によって求めることになる。具体的

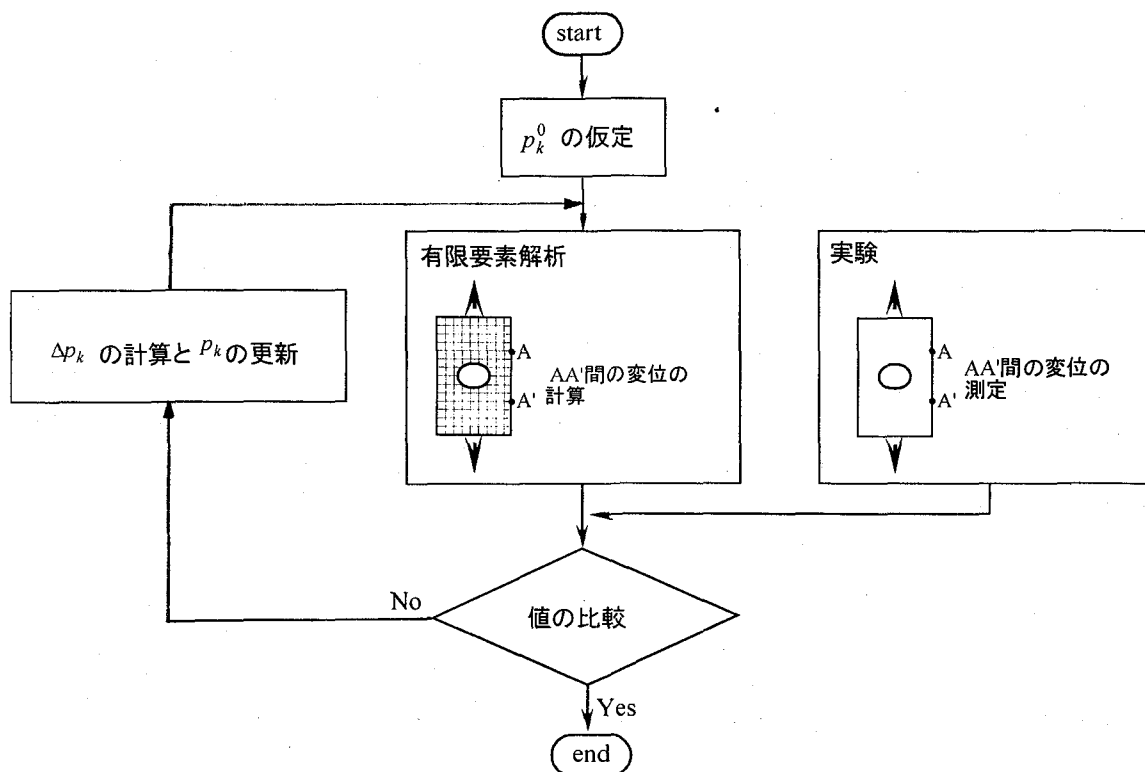


図3 提案する方法の流れ

な方法であるがこの場合には、標本点（値が既知の点）の数が任意であることと P_i の連続性だけでなく微係数の連続性望ましいことから格子状に配置した標本点（図5）の値を用いて次式で表される双3次補間関数を用いた。

$$P_i(h, n) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} t^{i-1} u^{j-1} \quad (8a)$$

$$t = (h - h_i) / (h_{i+1} - h_i) \quad (8b, c)$$

$$u = (n - n_j) / (n_{j+1} - n_j)$$

ここに c_{ij} は標本点における関数およびその微係数によって決定される係数である¹²⁾。実際の適用にあたっては P_i だけではなくその微係数も式(8)を微分することによって与えた。双3次補間関数を構成するには標本点に

対し P_i に加えて $\frac{\partial P_i}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial P_i}{\partial h}$ 、 $\frac{\partial^2 P_i}{\partial h \partial n}$ の微係数が必要となる。

これらの微係数はいずれも隣接する標本点を用いた差分によって求めた。したがって解析にあたって用いた値は格子点での P_i のみであり必要とする全体の計算量は著しく減少している。材料パラメータに対する挙動がなめらかでない場合にはこのような補間関数の使用は収束計算において問題を生ずる可能性がある。しかしながら、有限要素法解析の精度が信頼できるものである限り、そのような場合は想定した構成則モデルの適用そのもの、あるいは変位を考慮する点の選択に問題があると考えられるべきであろう。

同定に用いた変位は25点、初期値としては双3次補間関数によって補間値を求めることができる範囲で h/σ_y^0 は0.042きざみ、 n は0.01きざみで合計900点を選び収束性をみた。収束条件としては次のものを用いた。

$$\left| \frac{W_{n+1} - W_n}{W_n} \right| < 10^{-3} \quad (9)$$

ここに W_n は n 回目の W である。

変位を観測する点として点 QQ' を用いた場合にはどの初期値から出発しても6回以内に h/σ_y^0 については0.1%以内、 n については0.5%以内で真値に近い値に収束した。図6は点 QQ' における荷重変位曲線の収束状況の一例を表している。図中の点は変位を比較した点である。荷重変位曲線を観察してわかるように比較の変位の小さい範囲から同定すべきパラメータ h と n による依存性が大きく、収束値においては荷重変位曲線は疑似実験値によるものときわめて良く一致している。一方点 RR' を用いた場合も同様にすべての初期値に対して8回以内に収束値に達した。しかしながら点 QQ' に比較して若干ながら収束の性質が悪く収束値の真値に対する誤差は n で1%、 h で0.2%程度となった。また、点 QQ' と点 RR' の両方の変位を用いた場合には、精度および収束回数ともにそれぞれの例のほぼ中間的な挙動を示した。この程度の

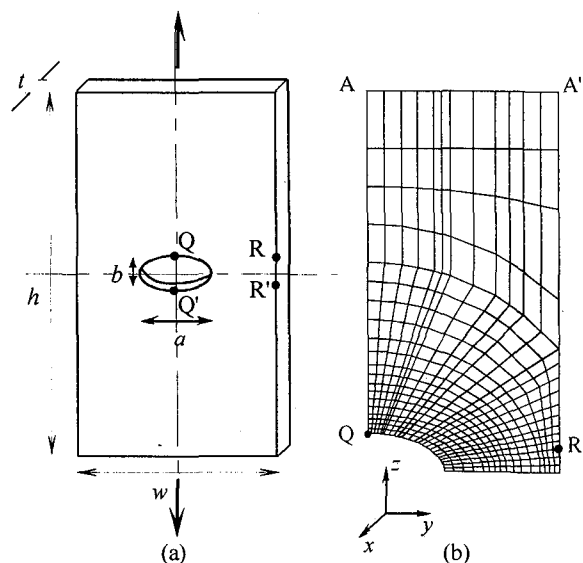


図4 仮想供試体と要素分割

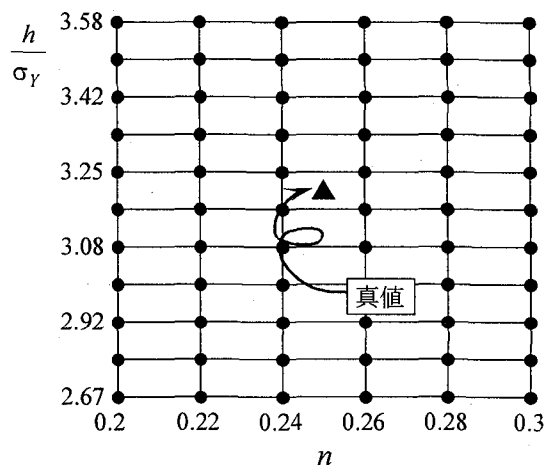


図5 探索範囲と標本点

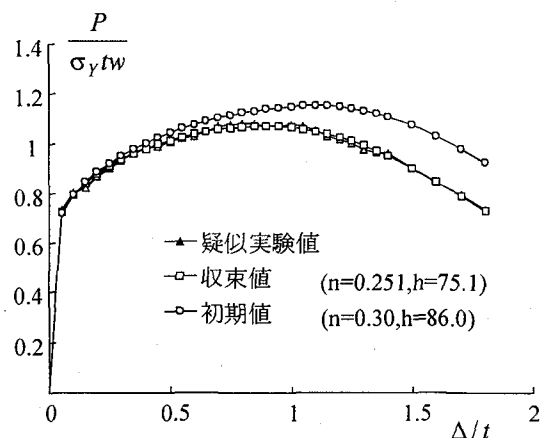


図6 点 QQ' での荷重変位曲線の収束状況

差は実用上問題にならないので、この供試体を用いれば式(5)で与えられるべき乗則のパラメータ同定はどちらの観測点で行っても内挿関数によって簡略化したガウス＝ニュートン法で良い結果が得られることが予想できる。

3.2 グルソン型構成方程式のパラメータの同定

次に大ひずみ領域でのパラメータ同定の例としてグルソン型構成方程式¹³⁾を考えることにする。グルソンの

構成方程式は金属材料の延性破壊に関係した空隙の発生と成長を考慮した弾塑性材料に関する構成方程式であり、金属材料の延性破壊の評価に有効なものとしてこれまで多くの数値シミュレーションに使われてきている^{14,15)}。先にも述べたように破壊や破断にかかわるようなひずみはいわゆる大ひずみ領域でありこの構成方程式に含まれる材料パラメータの同定はきわめて難しい。ここでは Tvergaard と Needleman¹⁶⁾によって修正されたグルソンの構成方程式を用いて 3.1 と同様の数値解析を行う。詳細は文献によることとして構成方程式の概略を以下に示す。まず降伏関数 ϕ は

$$\phi = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_M} \right)^2 + 2f^* q_1 \cosh \left(\frac{\text{tr} \sigma}{\sigma_M} \right) - \left\{ 1 + (q_1 f^*)^2 \right\} = 0 \quad (10)$$

で与えられる。ここに σ_M は空隙を含まない基質材料そのものの降伏応力、 σ_e はミゼスの相当応力、 f^* は空隙の体積比率 f の関数として与えられる。あきらかなように f^* の値の増加により材料は急速に軟化する。また q_1 は空隙の相互作用を考慮するために導入されたパラメータである。 $f^* = f$ かつ $q_1 = 1$ でグルソンの基本的な式になる。本研究では簡単のため $f^* = f$ とし、Tvergaard¹⁷⁾にならって $q_1 = 1.5$ とする。次に空隙の体積比率 f の成長率 \dot{f} は f_{nuc} を空隙の発生率、 f_{growth} を既存空隙の成長率として

$$\dot{f} = \dot{f}_{nuc} + \dot{f}_{growth} \quad (11)$$

となる。このうち \dot{f}_{growth} は基質材料の非圧縮性を仮定することにより、 D^p を変形率テンソルの塑性変形分として

$$\dot{f}_{growth} = (1-f) \text{tr} D^p \quad (12)$$

となる。一方、 \dot{f}_{nuc} は金属材料中に含まれる微小な介在物と基質材料との相互作用を考慮することにより以下のように与えられる。

$$\dot{f}_{nuc} = A \left(\frac{EH}{E-H} \right) \varepsilon^p + \frac{1}{3} B \text{tr} \sigma \quad (13)$$

ただし、 E はヤング率、 $H = H(\varepsilon_M^p)$ は基質材料の加工硬化係数、 A, B は空隙発生に関する材料パラメータである。式(13)からわかるように係数 A は基質材料の相当塑性ひずみ ε^p に関するものであり、係数 B は静水圧成分に関するものである。空隙の発生が主に基質材料の塑性変形に依存すると考えられる場合には $B=0$ とすればよい。ここでは $B=0$ の場合を考えることにする。Chu と Needleman¹⁸⁾は係数 A として次のような正規分布関数を適当として与えている。

$$A = \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

f_N は空隙を発生する介在物の初期体積比率である。上式は基質の相当塑性ひずみ ε_M^p が ε_N に等しいときに空隙の発生率が最大になりまた、そのばらつきは s_N で与えられることを意味している。なお、本研究では静水圧成分が正のときのみ式(13)、(14)にしたがって空隙が発生するものとしている。以上まとめて塑性流れが関連流れ則に従うものとし応力ひずみ関係をデカルト座標系で総和規約を用いて成分表示すると以下の式のようにになる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \left\{ L_{ijkl} - \frac{1}{Q} P_{ijkl} \right\} D_{kl} \\ P_{ijkl} &= L_{ijpq} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{pq}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial f} B \delta_{mn} \right) L_{mnkl} \quad (15a-d) \\ Q &= h + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial f} B \delta_{ab} \right) L_{abrs} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{rs}} \\ \frac{1}{h} &= \left\{ - (1-f) \frac{\partial \phi}{\partial f} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \frac{EH}{E-H} \frac{1}{\sigma_M} \left(A \frac{\partial \phi}{\partial f} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_M} \right) \sigma_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{1}{1-f} \right\} \end{aligned}$$

ただし L_{ijkl} は弾性テンソルである。

式(14)からわかるように ε_N や s_N は相当塑性ひずみ ε_M^p が破断時のそれに近いような領域で考えることが望ましい。したがって決定が困難なパラメータは ε_N と s_N であり、次の例ではこれらを同定する材料パラメータとしてを考えるものとする。それ以外の材料パラメータは $\frac{E}{\sigma_Y^0} = 833.3, \nu = 0.3, \frac{h}{\sigma_Y^0} = 3.125, n = 0.25, q_1 = 1.5, B = 0$ とした。

3.1 の場合と同様に図 4(a)に示す供試体を用い真値 $\varepsilon_N = 0.35, s_N = 0.20$ に対し測定誤差に相当する乱数による誤差を重ね合わせるにより擬似的な実験値とした。ただしグルソンモデルは軟化型モデルでありひずみの集中化の度合いが大きいため有限要素分割は図 7 に示すように図 4(b)に比較して応力集中部で分割を細かくした。その他の解析条件は 3.1 の場合と同じである。内挿関数による補間値を作成するための標本点は $0.1 \leq s_N \leq 0.3, 0.1 \leq \varepsilon_N \leq 0.6$ の範囲で s_N については 0.05 きざみ ε_N については 0.1 きざみで作成した格子点とした。上にも述べたように ε_N と s_N を同定するためにはある程度変形が大きくなければならない。したがって観測点での変位は局所的にしろ大きな変形を効率的に反映したものであることが望ましい。そこでこの例では考慮する変位の大きさと観測点の位置について考察するこ

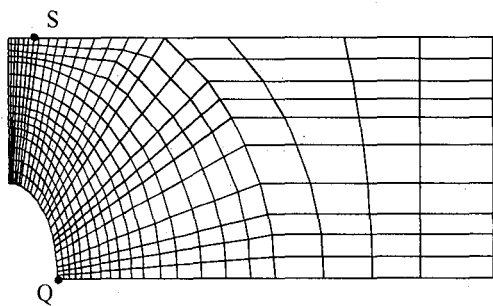


図7 要素分割

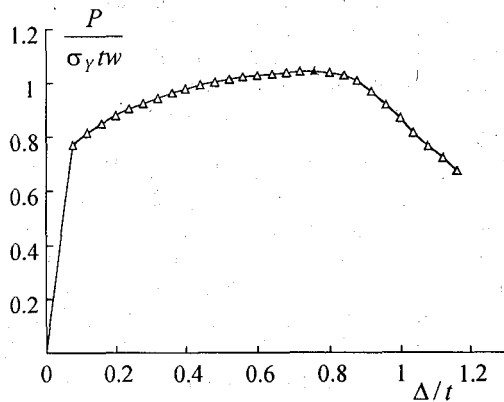


図8 荷重変位曲線 (点 QQ')

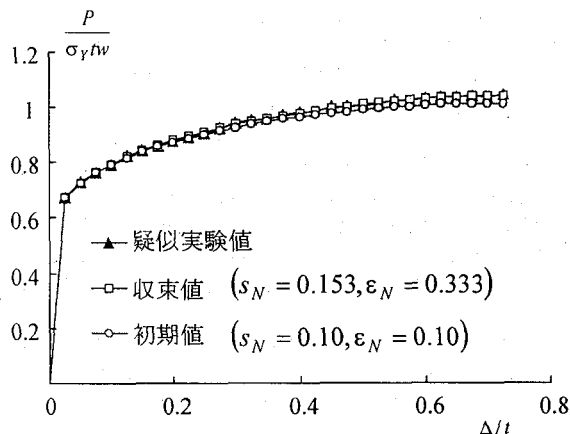


図9 荷重変位曲線の収束状況
(点 QQ', $\Delta/t \leq 0.725$)

とにする。点 QQ' の典型的な荷重変位曲線を図 8 に示す。標本点で行った計算でみるとこの荷重変位曲線の ε_N 、 s_N に対する依存性は最大荷重点付近までは小さく、 s_N に対する依存性はとくに小さい。その一方で最大荷重点以降では逆に s_N に対する依存性が大きくなるが、材料の軟化領域が支配的になるために変位そのものも材料パラメータに対し複雑な挙動を示す。そこで観測点の変位として最大荷重点までの $\Delta/t = 0.725$ と最大荷重後の $\Delta/t = 0.9$ までのそれぞれについてパラメータの同定を試みた。ただしこの例では疑似実験値の相対誤差の大きさは 1% としている。内挿関数で値が求まる範囲で s_N について 0.025 間隔、 ε_N については 0.05 間隔で初期値としたところ $\Delta/t = 0.725$ の場合には探索範囲の最外周の 2, 3 点を例外としてすべての点に対して一応の収束値

を得たが真値に対し ε_N は約 10%、 s_N については約 25% の誤差が生じた (図 9)。収束性については探索範囲の端部で若干悪くなるもののおおよそ 8 回以内で収束値を得た。図 10 に収束状況の一例を示すが、詳細を見ると収束が悪く変動が大きいのは s_N の方であり ε_N は数回でほぼ最終的な収束値に至っている。これを考えると $\Delta/t = 0.725$ までの変位では ε_N のみを同定する、あるいは探索範囲を絞り込む等の方法とる可能性が考えられる。実際問題として同定すべきパラメータが多いときには構成則モデルの考察等により材料パラメータを分離して効率よく同定する等の工夫が必要があるものと思われる。この例は変位の大きさによる分類も有効な方法のひとつであることを示している。次に $\Delta/t = 0.9$ までの場合には、 ε_N は真値に対し 1% 以内と良好な結果を得たが、 s_N については 7% 程度の誤差が生じた (図 11)。さらに大きい変位まで考慮しても精度や収束性の改善はほとんどなかった。いずれの場合も (1) の例に比較して大きな誤差を生じており、点 QQ' の変位を用いるとわずかに 1% 程度の測定誤差に対しても ε_N と s_N の同定にはかなりのぶれが生じることになる。なお疑似実験値の誤差を 2% にすると収束値の値が悪くなるだけでなく探索範囲内では収束解を得ることができない場合が増加した。点 QQ' の変位の観測では逆解析にこの方法をとるかぎり考慮する変位の大きさを変えてもパラメータの同定は容易ではないと考えられる。そこで次に観測点として点 SS' をとった場合について同様の考察を行ったところ全体として点 QQ' よりも収束性が優れていることがあきらかになった。例えば $\Delta/t = 0.1$ までの変位を用いると探索範囲の任意の初期値から ε_N 、 s_N とともに誤差 1% 程度の値に収束することが確認された。この場合の荷重変位曲線の収束状況の一例を図 12 に示す。これは点 SS' 自体の変位は小さいが ε_N と s_N に対する感度が大きいためである。ただしこの場合でも疑似実験値の誤差を 2% にすると収束性は大きく損なわれた。

現段階では構成則モデルと供試体の形状に対し変位の観測点についてどのような点をとるかを一般的に議論することは難しい。しかしながら実際の問題への適用に関してはこのように観測点の選択が重要となるので事前

4. まとめ

構造物の高度な解析において欠かせない大変形領域における弾塑性構成方程式の材料パラメータの同定方法に関する一つの提案を行った。基本的な考え方は高精度の非線形数値解析を可能にする環境の一般化を受けたものであり、まず容易に大変形を起こさせるための非一様な変形をする材料試験体を用い変位を測定し一種の逆解析の手法にしたがって想定した材料パラメータを決定するものである。非常に簡単な数値計算例についてこの手法の適用性と問題点について考察した。内挿関数を用

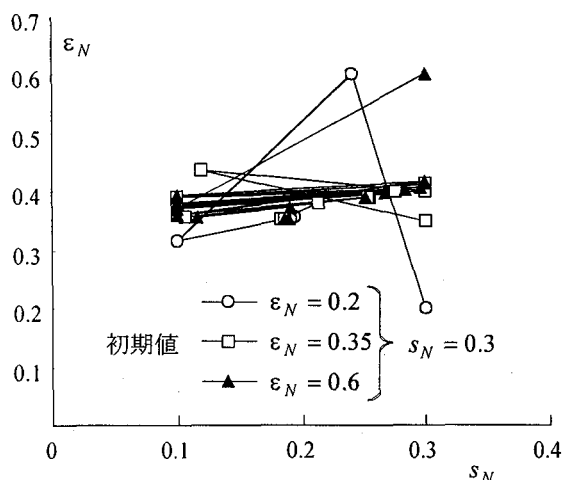


図10 パラメータの収束状況

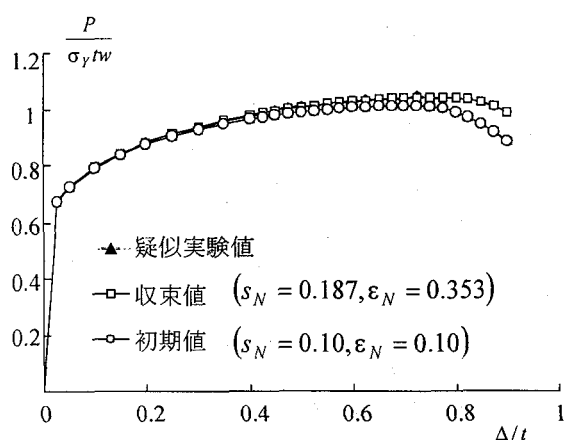


図11 荷重変位曲線の収束状況
(点 QQ', $\Delta/t \leq 0.9$)

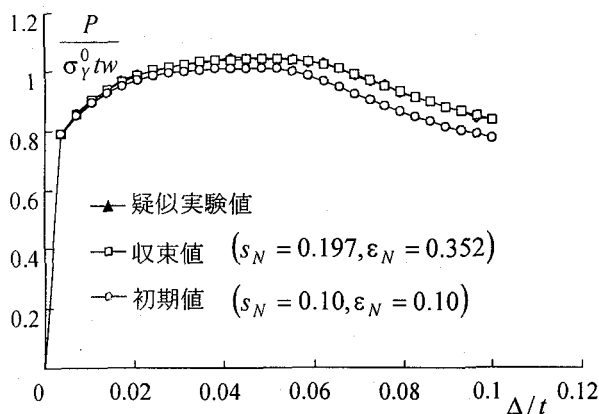


図12 荷重変位曲線 (点 SS', $\Delta/t \leq 0.1$)

いて簡略化したガウス＝ニュートン法により効率的な解析ができることあきらかになった。構成方程式ごとに含まれる材料パラメータに対する変位の感度には供試体の中でも偏りがあり、この手法の実際の適用に関しては数値計算により事前に十分に検討しておくことが望ましい。また構成則モデルによっては変位の大きさによっても感度の違いがあり、これをうまく使えば構成則モデルに含まれる材料パラメータをうまく分離して同定することも可能であると考えられる。

本研究で提示したものは手法の概略にすぎず、実用化にむけては次のような問題について検討が必要である。まず第1に精度とフレキシビリティの高い変位測定法の利用であり、次には合理的な変位観測点の選択に関する問題である。今後はこれらを考慮した実験を行い提案する手法の実用性を実証する予定である。

参考文献

- 1) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W., "A class of phenomenological corner theories of plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp.465, 1979.
- 2) Obata, M., Shoji, T., and Goto, Y., Analysis of strain localization of solids under cyclic loading using a corner theory of plasticity, *Proc. Of SDSS'97*, Vol. 2, p.817, 1997
- 3) 皆川勝：構造用鋼材の弾塑性履歴挙動のモデル化とそれの構造部材への応用，学位論文，昭和63年。
- 4) Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T.: Development of cyclic two-surface model for structural steels with yield plateau, *NUCE Report*, No.9302, March, 1993.
- 5) 西村宣男, 小野潔, 池内智行：単調載荷曲線をもとにした繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の構成式，土木学会論文集，No.513/I-31, pp.27, 1995.4.
- 6) Dafalias, Y. E. and Popov, E. P.: Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, pp.645, 1976.
- 7) 後藤芳顕、王慶雲、高橋宣男、小畑誠、繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則、土木学会論文集（印刷中）
- 8) Aoki, S., Amaya, K., Sahashi, M., Nakamura, T., Identification of Gurson's material constants by using Kalman filter, *Comp. Mech.*, Vol. 19, pp.501, 1997.
- 9) Mahnken, R. and Stein, E.: Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal directions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 147, pp.17, 1997
- 10) 結城和宏、上原匠、小畑誠、信田佳延：高強度繊維補強コンクリート破壊靱性に関する研究、コンクリート工学年次論文報告集、p445, 1995
- 11) HKS Inc., ABAQUS Ver.5.6, User's Manual, 1997
- 12) Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1988.
- 13) Gurson, A.L., "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I -Yield criteria and flow rules for porous ductile media", *J. Engrg. Mater. Tech.*, Vol. 99, pp.2, 1977.
- 14) Needleman, A. and Tvergaard, V., *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, p.151, 1987
- 15) 黒田充紀、井原啓介、阿部英彦、矩形断面鋼製橋脚の大変形時における角部破壊予測の試み、足利工業大学研究集録第25号, 1997
- 16) Needleman, A. and Tvergaard, V., An analysis of ductile rupture in notched bars, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 32, pp.461, 1984.
- 17) Tvergaard, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain condition, *Int. J. Fracture Mech.*, Vol. 17, pp.389, 1981
- 18) Chu, C.C. and Needleman, A., *J. Eng. Mat. Tech.* Vol. 102, pp.249, 1980

(1997年9月26日受付)