

1.5 GHz マイクロ波による頭部内上昇温度の FDTD 計算

藤原 修[†] 谷野 正明[†] 王 建青[†]FDTD Computation of Temperature-Rise inside Realistic Head Model
for 1.5 GHz Microwave ExposureOsamu FUJIWARA[†], Masaaki YANO[†], and Jianqing WANG[†]

あらまし 携帯電話の発する電波の人体影響が懸念され、近傍界ばく露による頭部内の局所 SAR (比吸収率) がクローズアップされている。無線周波電波に対する人体影響が熱的作用による体温上昇に基づくものとする限り、局所 SAR の人体影響も体温調節中枢を含む頭部内の温度上昇との関連において生ずるものと推察される。本論文では、この観点から筆者らの製作になる頭部リアルモデルで 1.5 GHz マイクロ波を浴びた場合の頭部内における上昇温度の FDTD 法による数値解析を行った。その結果、上昇温度は眼球、筋肉組織で最大に達し、職業人に適用される我が国の安全基準レベル (5 mW/cm^2) のマイクロ波ではたかだか 0.35°C であること、体温調節機能を支配する視床下部での上昇温度は 0.0026°C であり、調節行動を引き起こすしきい値 (0.3°C) よりも 2 けた低いこと、等がわかった。

キーワード マイクロ波, 局所 SAR, 生体影響, 頭部リアルモデル, 上昇温度

1. ま え が き

無線周波電波に対する人体影響は電力吸収による体温上昇がもたらす熱的效果に起因して生ずるとの考え [1] が世界共通の認識に達しており、これを基礎にした電波の安全基準や人体防護指針が米国や我が国を含めた世界諸国において既に制定されている [2]~[4]。例えば、我が国での防護指針 [4] においては、遠方界ばく露による SAR (Specific Absorption Rate, 単位体重当りの吸収電力で単位は $[\text{W/kg}]$, 比吸収率と呼ばれる) が指針値 (全身平均値: 0.4 W/kg , 体表・四肢での局所 1 g 平均値: 25 W/kg , それ以外は 8 W/kg) を下回る電波強度を安全レベルとして定めている。なお, SAR とは, 人体組織内の電界の大きさを E , 導電率を σ , 組織密度を ρ とすれば, $\text{SAR} = \sigma E^2 / (2\rho)$ で与えられる。

最近では、携帯電話による爆発的な普及で、その発する電波の人体影響が公衆の間で懸念されている。むろん、携帯電話では SAR の全身平均値は上述の指針値を大きく下回るが、使用法によっては局所値が指

針値を超える状況が予想され、この場合の人体影響がクローズアップされている。それ故に、携帯電話等の近傍界ばく露による局所 SAR が注目を集め、アンテナが人体頭部に近接している場合にどれだけの SAR 値が局所的に見込まれるかの研究が世界各国において盛んに行われている [5]~[8]。

一方, SAR 指針値の生理学的根拠は電波を全身に浴びた場合の深部体温上昇に対応する全身平均 SAR だけであって局所 SAR にはない。現用基準の最も厳しい局所 SAR 指針値 (8 W/kg) は、遠方界ばく露に対する局所ピーク値が全身平均値 (0.4 W/kg) の 20 倍を超えないとの仮定に基づき定められている。筆者らは、局所 SAR の指針値は体温調節中枢を含む頭部内の上昇温度との関連において決定すべきと考える。

本論文では、この観点から筆者らの製作になる頭部リアルモデル [9]~[12] を用いて 1.5 GHz マイクロ波を浴びた場合の頭部内における上昇温度の試算結果を示す。

2. 計算方法

2.1 FDTD 計算と頭部モデル

1.5 GHz マイクロ波を浴びた人体頭部内の上昇温度を知るには、発熱源となる SAR をまず求めなければ

[†]名古屋工業大学工学部電気情報工学科, 名古屋市
Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Nagoya-shi, 466-8555 Japan

ばならない。本論文では、頭部内 SAR は時間領域有限差分法 (Finite-Difference Time-Domain Method, 以下 FDTD 法と呼ぶ) [13] で計算する。FDTD 法とは、Maxwell の方程式を時間と空間の二つの領域について差分化し、それらの差分式を時間領域で逐次計算することで電磁界を求める計算手法である。このとき空間差分に際しては、計算対象を格子状に分割し各微小格子 (セル) に電気定数を与えることで計算対象をモデル化することとなるため、FDTD 法は人体のような複雑形状の不均質媒体での SAR 計算に適している。しかしながら、数値解析を行う計算機のメモリ容量は有限であるので、計算領域も有限空間となる。そのため、計算領域の境界面において反射波をなくすための種々の吸収境界条件が工夫・提案されているが、本論文では最も簡単で有効とされる Mur の第 1 次吸収境界条件 [14] を使用した。頭部の計算モデルとしては、標準日本人成人の頭部解剖図を参考に筆者らのグループが製作した 3 次元頭部リアルモデル [9] を使用した。その外観と頭部内各組織の構造を図 1 に示す。(a) は頭部の正面図であり、(b) は眼球を含む水平平面 A-A' での断面図、(c) は頭部中心を通る垂直平面 B-B' での断面図である。頭部リアルモデルは、一辺

が 2.5 mm (1.5 GHz マイクロ波照射モデル内の最小波長の約 1/9) の立方体のセルで構成される。

頭部リアルモデルの大きさは、 x, y, z 軸方向にそれぞれ 14.5, 19.25, 18.0 cm (耳, 首を除く) であり、モデルを構成する組織は、眼球、皮膚、脂肪、筋肉、骨、脳の 6 種類である。図 2 には頭部リアルモデルを配置した計算領域とマイクロ波の入射方向を示す。なお、図の x, y, z 軸の目盛はセル数で表している。計算領域は、 x 軸方向に 199 セル、 y 軸方向に 200 セル、 z 軸方向に 170 セルの大きさであり、領域内の格子総数は、 $199 \times 200 \times 170 = 6,766,000$ セルである。この領域内の xy 平面の中央に頭部モデルを配置した。但し、計算に際しての実際の領域は頭部の左右対称性から $100 \times 200 \times 170 = 3,400,000$ セルとした。

入射マイクロ波は 1.5 GHz の y 軸正方向へ伝搬する平面波である。入射波の電力密度は、我が国の郵政省電波安全基準 [4] の職業人に適用されるレベルの 5 mW/cm^2 とした。SAR 計算に際しての頭部リアルモデルの各組織の電気定数 (周波数: 1.5 GHz) を表 1 に示す。時間ステップ間隔は解の安定条件と格子間隔とから 4.17 ps とし、計算領域内の電磁界が定常状態に達する時間は 7 周期であった。なお、頭部リアルモデル内の各セルの SAR 値は最後の 1 周期中の最大電界値から求めた。

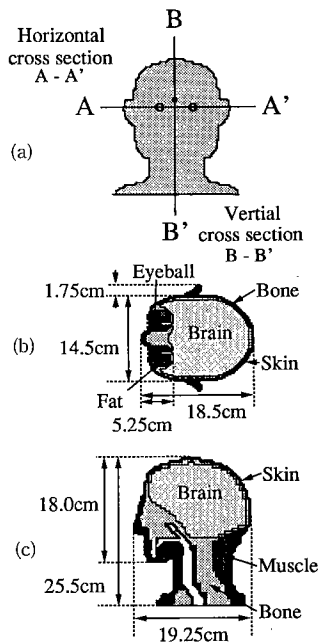


図 1 計算モデル
Fig.1 Calculation model.

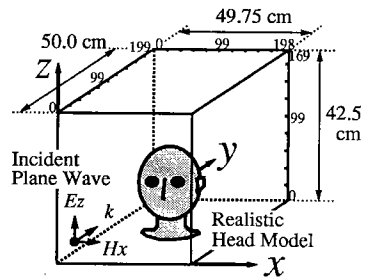


図 2 計算領域と入射波
Fig.2 Computation region and incident microwaves.

表 1 1.5 GHz における頭部組織の電気定数
Table 1 Electrical properties at 1.5 GHz of tissues in realistic head model.

Tissue	Relative permittivity ϵ_r	Conductivity σ [S/m]
Bone	5.6	0.12
Brain	46	1.40
Muscle	49	1.77
Eyeball	80	1.90
Fat	5.6	0.12
Skin	49	1.77

2.2 上昇温度と FDTD アルゴリズム

頭部内 SAR 分布を発熱源とした熱伝導方程式を FDTD 法で解析することによって頭部内上昇温度を数値的に計算する。一般に、生体内上昇温度の計算に際しては、マイクロ波による熱発生と組織内および組織間の熱伝導による熱移動、血流による熱冷却、皮膚表面から外気への熱放散を考慮すればよい。但し、ヒトの体温冷却行動には発汗作用と代謝量調節作用とがあるが、安全基準レベルのマイクロ波では発熱レベルが十分低く、これらの作用は生じないものと仮定する。また、頭部内各組織の初期温度は 37°C で一様とし、各組織の熱定数は温度には依存せず常に一定であると

する。いま、図 2 の状況でマイクロ波が時刻 $t = 0$ でステップ的に照射されたものとすれば、初期温度に対する頭部内上昇温度 u の支配方程式は、

$$\rho \cdot C_p \frac{\partial u}{\partial t} = K \nabla^2 u + \rho \cdot \text{SAR} - b \cdot u \quad (1)$$

と表され、境界条件は、外気又は腔内と接する頭部組織の表面上の上昇温度に対して、

$$h \cdot u = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2)$$

と与えられる [15]。ここで、式 (2) 中の n はその表面の法線方向の座標を表している。また、式中の ρ は組織の密度 [kg/m³]、 C_p は比熱 [J/kg · °C]、 K は熱伝導率 [W/m · °C]、 b は血流に関する定数 (数値が大きいほど血流量が大) [W/m³ · °C]、 h は熱伝達率 [W/m² · °C] である。

式 (1) で熱発生源の SAR は頭部リアルモデル内の各セルの SAR 値を用いるため、頭部内上昇温度分布は式 (1)、(2) を時間と空間について差分化することにより数値的に求めることができる。すなわち、熱の支配方程式の時間ステップ間隔を δ_t 、空間差分間隔を δ ($= \delta_x = \delta_y = \delta_z$) とし、経過時間 $m\delta_t$ (m はイタレーション数) の直交座標系の位置 $(i\delta, j\delta, k\delta)$ における SAR と上昇温度とをそれぞれ SAR $(i\delta, j\delta, k\delta) = \text{SAR}(i, j, k)$ 、 $u(i\delta, j\delta, k\delta, m\delta_t) = u^m(i, j, k)$ とすれば、式 (1)、(2) は、

$$\begin{aligned} &u^{m+1}(i, j, k) \\ &= u^m(i, j, k) + \frac{\delta_t}{C_p(i, j, k)} \text{SAR}(i, j, k) \\ &\quad - \frac{\delta_t}{\rho(i, j, k)C_p(i, j, k)} b(i, j, k)u^m(i, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\delta_t K(i, j, k)}{\rho(i, j, k)C_p(i, j, k)(\delta^2)} \\ &\times \{u^m(i+1, j, k) + u^m(i, j+1, k) \\ &+ u^m(i, j, k+1) + u^m(i-1, j, k) \\ &+ u^m(i, j-1, k) + u^m(i, j, k-1) \\ &- 6u^m(i, j, k)\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &u^m(i, j, k) \\ &= \frac{K(i, j, k)}{h(i, j, k)\delta + K(i, j, k)} u^m(i+1, j, k) \end{aligned} \quad (4)$$

という差分式に変わる (但し、境界条件は外気又は腔内に接する頭部組織表面の x 軸正方向の上昇温度だけについて示す)。

時間ステップ δ_t と空間差分 δ とに関する差分分解の安定化条件 [16] は、血流を考慮した場合も差分化された上式の熱伝導方程式に Von Neumann の条件 [17], [18] を適用することで導出でき、

$$\delta_t \leq \frac{2\rho C_p (\delta^2)}{12K + b(\delta^2)} \quad (5)$$

と求められる (導出過程の詳細は付録参照)。

上昇温度の数値計算に際しての諸量は次のとおりである。頭部内各組織の代表的な熱的定数は文献 [19] から引用した。それらの数値を表 2 にまとめて示す。表 2 の組織ごとの数値は組織内において一定とした。なお、熱伝達率 h は表中にはないが、計算に際しての数値は頭部表面の外気に接する部位 (h_a) と主に腔内に接する部位 (h_o) とで区別し、前者は Kritikos らの論文 [15] から $h_a = 10.47 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$ 、後者は Taflove らの論文 [20] から $h_o = 50.0 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$ という値をそれぞれ引用した。また、空間差分 δ は頭部リアルモデルを構成する立方セルの一辺である 2.5 mm とし、時間ステップ δ_t については、次のように決めた。式 (5) の右辺によると、 δ_t は、 δ が一定ならば熱伝導率 K と血流 b が大きく密度 ρ と比熱 C_p とが小さい組織ほど短く設定しなければならない。そのような組織は表

表 2 頭部組織の熱定数
Table 2 Thermal parameters of tissues in realistic head model.

	Bone	Brain	Muscle	Eyeball	Fat	Skin
ρ [kg/m ³]	1790	1020	1020	1050	900	1000
C_p [J/kg · °C]	1300	3500	3500	3900	2300	3500
K [W/m · °C]	0.30	0.60	0.60	0.50	0.22	0.50
b [W/m ³ · °C]	1401	37822	3488	0	815.8	8652

2 の数値から判断すれば、脳組織に相当する。それ故に、脳組織での δ_t を式 (5) から求めると、 $\delta_t \leq 6\text{s}$ となるので、これを満たすように $\delta_t = 3\text{s}$ とした。

3. 結果と考察

3.1 上昇温度と SAR

図 3 は、マイクロ波をステップ的に浴びた場合の頭部内組織ごとの上昇温度ピーク値の時間推移を示す。図から、頭部内組織の上昇温度はいずれも時間と共に指数的に上昇し、4,000 秒 (67 分) ではすべての組織において熱平衡に近い状態になっていること、上昇温度ピークの定常値は、血流のない眼球組織で 0.35°C と最も高く、血流の最も多い脳組織では 0.17°C と最も低いこと、等がわかる。また、脳組織の上昇温度が定常値に達する熱的時定数を上昇カーブの接線と定常値を表す直線との交点から求めると、約 450 秒 (7 分 30 秒) となる。一方、世界各国の安全基準では空間電磁界の 6 分間平均値を安全性評価に使用しているが、この根拠については、例えば、我が国の防護指針 [4] によると「… 人体の熱的時定数はおよそ 0.1 時間以上と見積もられているため、…」と説明しており、それ故に図 3 から得られた脳組織の熱的時定数は妥当であると考えられる (脳以外の他の組織においても熱的時定数はいずれも 0.1 時間以上であることが確認できる)。

図 4、図 5 は頭部内の局所 SAR と 7,200 秒 (120 分) 後における上昇温度との空間分布を示す。なお、頭部内組織の上昇温度は 4,000 秒でほぼ定常に達しているが、眼球組織では 4,000 秒以降も温度の上昇傾向が

わずかに認められたので、本論文では 7,200 秒後の上昇温度をもって組織温度の定常値とした。図 4 は図 1 (b) の水平断面での数値結果であり、図 5 は図 1 (c) の垂直断面のそれである。図の縦軸と横軸は図 2 の座標軸と同じくセル数で表している。これらの図によると、マイクロ波が頭部の前面から照射されているので、SAR と上昇温度の高い部位はいずれも頭部前面部に集中していること、しかし両者の空間分布は異なっていること、等がわかる。表 3 には組織ごとの局所 1g 平均 SAR と 7,200 秒後の頭部内上昇温度のピーク値と平均値とをまとめて示す。表から、上昇温度は眼球、筋肉、皮膚でピークに達しており、それらの数値は 0.35°C 前後であることがわかる。また、組織ごとの上昇温度はピーク値と平均値のいずれも局所 1g 平均 SAR の大きさとは必ずしも対応していないが、頭部全体の平均 SAR (0.379 W/kg) は各組織に $0.17 \sim 0.35^\circ\text{C}$ のピーク上昇温度をもたらしていることがわかる。一方、遠方界ばく露による 0.4 W/kg の全身平均 SAR はヒトの基礎代謝量から考察して $0.2 \sim 0.4^\circ\text{C}$ の深部体温上昇を引き起こす [4] とされるので、ほぼこの範囲内

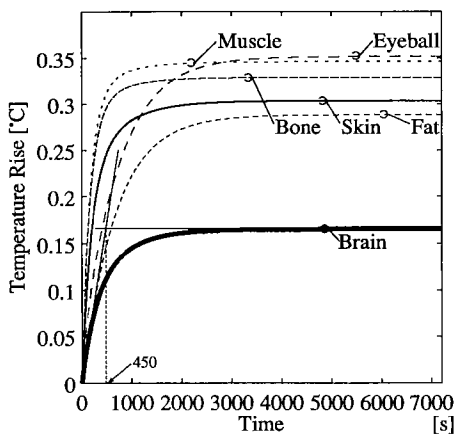


図 3 頭部内上昇温度ピーク値の時間推移特性
Fig. 3 Time change of calculated peak temperature rise in realistic head model.

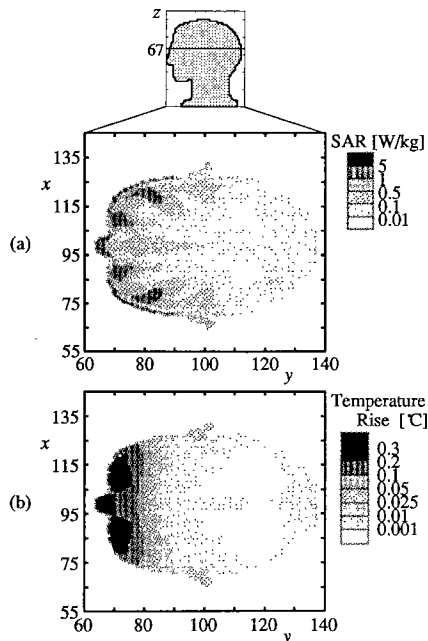


図 4 水平断面 ($z = 67$) での (a) SAR 分布と (b) 上昇温度分布
Fig. 4 Distributions of (a) SAR and (b) temperature rise in the horizontal cross section ($z = 67$).

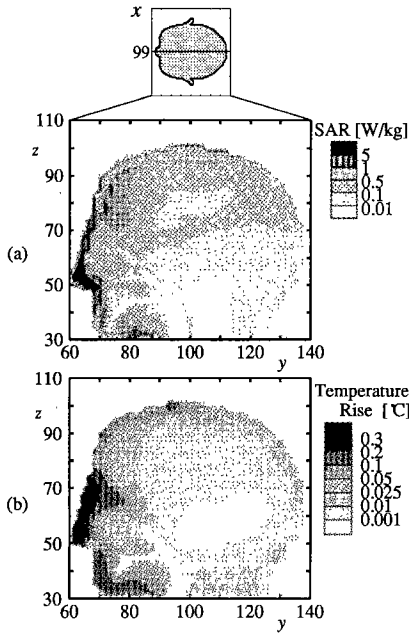


図5 垂直断面 ($x = 99$) での (a) SAR 分布と (b) 上昇温度分布
 Fig.5 Distributions of (a) SAR and (b) temperature rise in the vertical cross section ($x = 99$).

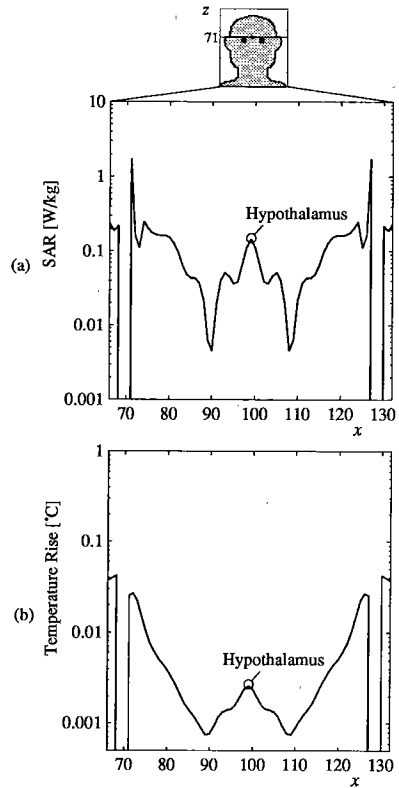


図6 視床下部を貫く頭部右方から左方 ($y = 101, z = 71$) への (a) SAR 分布と (b) 上昇温度分布
 Fig.6 Distributions of (a) SAR and (b) temperature rise in the line passing through the hypothalamus from right to left side.

表3 各組織の局所 1g 平均 SAR と上昇温度

Table 3 Averaged SAR over any one-gram of tissues and temperature rise in tissues of realistic head model.

Tissue	1g Peak SAR [W/kg]	Peak Temperature Rise [°C]	Averaged Temperature Rise [°C]
Bone	1.33	0.31	0.054
Brain	2.27	0.17	0.011
Muscle	5.62	0.35	0.073
Eyeball	2.62	0.35	0.27
Fat	1.15	0.29	0.16
Skin	4.47	0.33	0.060
Averaged whole head	0.379		0.037

にある表3の試算結果は妥当であると考える。

3.2 視床下部の上昇温度

ヒトの体温は、化学的な熱産生と物理的な熱放散の動的平衡で約 37°C に保たれている。両者を統合・制御している中枢機構は間脳視床下部であるとされ、体温調節にかかわる内部の温度検出部位としては前視床下部、視束前野等がある [21]。視床下部温がしきい値 (0.3°C) を超えると皮膚血管の拡張、血流量の増加、呼吸や発汗による水分蒸発等の体温調節行動が誘

発されるという [22]。視床下部は脳中心部の間脳の下部に位置し、本計算においては図2の座標系で示すと (99, 101, 71) 付近に相当する。視床下部を貫く頭部右方から左方にわたる SAR 分布と上昇温度分布とを 図6、視床下部を貫く頭部前面から後部にわたるそれらを 図7 にそれぞれ示す。なお、図6において SAR と上昇温度が著しく低下している部位は頭部と耳殻との間の外部空間に相当する。図によると、頭部内の1次元での SAR 分布と上昇温度分布とは比較的類似していることがわかる。視床下部における局所 SAR 値 (1セル) は 0.14 W/kg で、この場合の上昇温度は 0.0026°C であった。この上昇温度は視床下部の体温調節行動を誘発するしきい値とは2けた以上小さく、それ故に人体防護指針の遠方界ばく露で生ずる頭部内局所 SAR はヒトの体温調節機能に何の影響も及ぼさないものと筆者らは推察する。

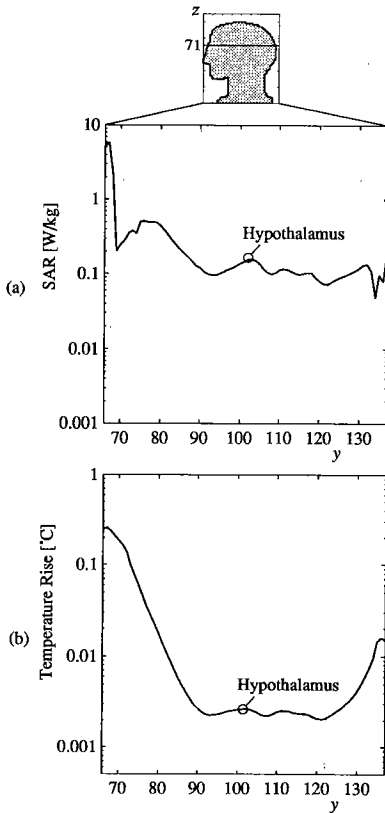


図7 視床下部を貫く頭部前面から後部 ($x = 99, z = 71$) への (a) SAR 分布と (b) 上昇温度分布

Fig.7 Distributions of (a) SAR and (b) temperature rise in the line passing through the hypothalamus from front to back side.

4. むすび

携帯電話の発する電波の人体影響が懸念され、近傍ばく露による頭部内の局所 SAR が注目を集めている。無線周波電波の人体影響が体温上昇の熱的作用に基づくものとする限り、局所 SAR の人体影響も体温調節中枢を含む頭部内の上昇温度との関連で生ずるものと推察される。本論文では、この立場から 1.5 GHz マイクロ波にさらされた頭部の上昇温度分布を筆者らの製作になる頭部リアルモデルを用いて FDTD 法で計算した。その結果、上昇温度ピーク値は電波を浴びる前面組織の眼球、筋肉組織で生じ、その値は 0.35°C 前後であること、体温調節機能を支配する視床下部での上昇温度は 0.0026°C であり、体温調節行動を誘発するしきい値 (0.3°C) よりも 2 けた以上も小さいこと、等が判明した。

本計算で得られたマイクロ波遠方界ばく露で生ずる頭部内上昇温度分布は、局所 SAR の生理学的立場からの指針値決定に際しての規範データになるものと考えるが、携帯電話等の近傍界による上昇温度計算、近傍界ばく露の生理学的安全性の検討等が今後の課題となろう。

文 献

- [1] 例えば、藤原 修, “電磁界の人体への影響,” 静電気学誌, vol.20, no.4, pp.198-204, 1996.
- [2] Om P. Gandhi, Ed., Biological Effects and Medical Applications of Electromagnetic Energy, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1990.
- [3] American National Standards Institute, American National Standard Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic Fields, 3 kHz to 300 GHz, ANSI C95.1-1990.
- [4] 郵政省電気通信技術審議会答申, 諮問第 38 号「電波利用における人体の防護指針」1990.
- [5] M. Okoniewski and M.A. Stuchly, “A study of the hand-set antenna and human body interaction (invited paper),” IEEE Trans., vol.MTT-44, no.10, pp.1855-1864, Oct. 1996.
- [6] V. Hombach, K. Meier, M. Burkhardt, E. Kuhn, and N. Kuster, “The dependence of EM energy absorption upon human head modeling at 900 MHz,” IEEE Trans., vol.MTT-44, no.10, pp.1865-1873, Oct. 1996.
- [7] S. Watanabe, M. Taki, T. Nojima, and O. Fujiwara, “Characteristics of the SAR distributions in a head exposed to electromagnetic fields radiated by a hand-held portable radio,” IEEE Trans., vol.MTT-44, no.10, pp.1874-1883, Oct. 1996.
- [8] O.P. Gandhi, G. Lazzi, and C.M. Furse, “Electromagnetic absorption in the human head and neck for mobile telephones at 835 and 1900 MHz,” IEEE Trans., vol.MTT-44, no.10, pp.1884-1897, Oct. 1996.
- [9] O. Fujiwara and A. Kato, “Computation of SAR inside Eyeball for 1.5-GHz Microwave Exposure Using Finite-Difference Time-Domain Technique,” IEICE Trans. Commun., vol.E77-B, no.6, pp.732-737, June 1994.
- [10] O. Fujiwara and M. Nomura, “Approximation of Surface-SAR in a Realistic Head Model for Microwave Exposure using External Magnetic Near-Field,” IEICE Trans. Commun., vol.E78-B, no.2, pp.140-144, Feb. 1995.
- [11] 野村道彦, 藤原 修, “マイクロ波遠方界で生ずる頭部表面比吸収率の組織構造依存性,” 電学論 (C), vol.116, no.1, pp.2-7, Jan. 1996.
- [12] 藤原 修, 高井清文, “皮膚組織の電気定数と頭部リアルモデルにおけるマイクロ波の比吸収率計算,” 電学論 (C), vol.117, no.1, pp.101-107, Jan. 1997.
- [13] K.S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell’s equation in isotropic media,” IEEE Trans., vol.AP-14, no.8, pp.302-307, Aug. 1966.

- [14] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," IEEE Trans., vol. EMC-23, no.4, pp.377-382, April 1981.
- [15] H.N. Kritikos, K.R. Foster, and H.P. Schwan, "Temperature Profiles in Spheres Due to Electromagnetic Heating," J. Microwave Power, vol.16(3&4), pp.327-344, 1981.
- [16] 高井清文, 藤原 修, "1.5 GHz マイクロ波による眼球内の SAR と上昇温度との定量関係," 信学技報, EMCJ-96-45, Oct. 1996.
- [17] 例えば, R.D. Richtmyer and K.W. Morton, Difference methods for initialvalue problems, 2nd edition, John Wiley and Sons 1967.
- [18] 例えば, 高橋亮一, 棚町芳弘, 差分法, pp.86-90, 101-103, 培風館, July 1991.
- [19] 晴山典彦, 藤井麻美子, 酒本勝之, 金井 寛, "電磁誘導ハイパーサーミアによる頭部加温の基礎検討," 医用電子と生体工学, vol.34-3, pp.230-237, 1996.
- [20] A. Taflove and M.E. Brodwin, "Computation of the Electromagnetic Fields and Induced Temperatures Within a Model of the Microwave-Irradiated Human Eye," IEEE Trans., vol.MTT-23, no.11, pp.888-896, Nov. 1975.
- [21] 例えば, 大村 裕, 概説生理学—動物の機能編, pp.203-245, 南江堂, 1988.
- [22] 例えば, 杉 晴夫, 人体機能生理学, 南江堂, pp.587-609, 1985.

付 録

熱伝導方程式の差分化に伴う時間ステップ δ_t と空間差分 δ ($\delta = \delta x = \delta y = \delta z$) とに関する解の安定条件は, 解を空間に関して有限フーリエ級数展開し, フーリエ成分の振幅の増減を調べることで導出できる.

時刻 t ($0 \leq t \leq T$) の上昇温度を関数 $u = u(x, y, z, t)$ とし, 時間 $m\delta_t$ (m はイタレーション数), 直交座標系の位置 $(i\delta, j\delta, k\delta)$ における関数値を, $u(i\delta, j\delta, k\delta, m\delta_t) = u(i, j, k, m)$ と新たに表記する. 但し, 関数 u は, $\{i\} = \{0, 1, 2, \dots, i_0 - 1\}$, $\{j\} = \{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$, $\{k\} = \{0, 1, 2, \dots, k_0 - 1\}$, $\{m\} = \{0, 1, 2, \dots, [T/\delta_t]\}$ の範囲で存在するものとする ($[\]$ はガウス記号). そのとき, 関数 u の空間に関する有限フーリエ級数展開式は

$$u(i, j, k, m) = \sum_{\lambda=0}^{i_0-1} \sum_{\mu=0}^{j_0-1} \sum_{\gamma=0}^{k_0-1} U_{\lambda, \mu, \gamma}^m e^{\xi \left(i \frac{2\pi}{i_0} \lambda + j \frac{2\pi}{j_0} \mu + k \frac{2\pi}{k_0} \gamma \right)} \quad (A-1)$$

$$U_{\lambda, \mu, \gamma}^m = \frac{1}{i_0 j_0 k_0} \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{k=0}^{k_0-1} u(i, j, k, m)$$

$$\times e^{-\xi \left(\lambda \frac{2\pi}{i_0} i + \mu \frac{2\pi}{j_0} j + \gamma \frac{2\pi}{k_0} k \right)}$$

と表すことができる. ここで, ξ は虚数単位を表し, $\xi = \sqrt{-1}$ である.

式 (A-1) を本文中の式 (3) (但し, ここでは熱拡散だけを考えるので, 熱源項は省略する) に代入し, 両辺を $e^{\xi \left(i \frac{2\pi}{i_0} \lambda + j \frac{2\pi}{j_0} \mu + k \frac{2\pi}{k_0} \gamma \right)}$ で除せば, 一つのフーリエ成分について,

$$\begin{aligned} U_{\lambda, \mu, \gamma}^{m+1} &= \left\{ 1 - \frac{\delta_t b}{\rho C_p} + \frac{\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \left(e^{\xi \frac{2\pi}{i_0} \lambda} + e^{-\xi \frac{2\pi}{i_0} \lambda} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\xi \frac{2\pi}{j_0} \mu} + e^{-\xi \frac{2\pi}{j_0} \mu} + e^{\xi \frac{2\pi}{k_0} \gamma} + e^{-\xi \frac{2\pi}{k_0} \gamma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 6 \right) \right\} U_{\lambda, \mu, \gamma}^m \\ &= \left[1 - \frac{\delta_t b}{\rho C_p} - \frac{4\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{i_0} \lambda \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \left(\frac{\pi}{j_0} \mu \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{k_0} \gamma \right) \right\} \right] U_{\lambda, \mu, \gamma}^m \quad (A-2) \end{aligned}$$

を得る. ここで上式を $U_{\lambda, \mu, \gamma}^{m+1} = g U_{\lambda, \mu, \gamma}^m$ とおけば, g は時間ステップが δ_t だけ進んだときの各フーリエ成分における増加率を表すことがわかる.

計算区間 $0 \leq t \leq T$ ($T = m\delta_t$: 全計算時間) におけるすべての m と λ, μ, γ について解が安定であるためには, 増加率 g に関して,

$$0 \leq |g|^m \leq N$$

を満たす定数 N が存在すればよい. この条件は,

$$|g| \leq 1 + M\delta_t \quad (A-3)$$

を満たす正の定数 M が存在すればよいことと等価であることが証明されている [16].

式 (A-3) を「Von Neumann の条件」と言う [17]. 同条件を式 (A-2) に適用すると,

$$\left| 1 - \frac{\delta_t b}{\rho C_p} - \frac{4\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{i_0} \lambda \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{j_0} \mu \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{k_0} \gamma \right) \right\} \right| \leq 1 + M\delta_t$$

となる. 上式において絶対値記号内の値が正の場合は明らかに成立しているの, 負となる場合について考えれば, 正の定数 M が常に存在するためには,

$$-1 + \frac{\delta_t b}{\rho C_p} + \frac{4\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{i_0} \lambda \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{j_0} \mu \right) \right\}$$

$$+ \sin^2 \left(\frac{\pi}{k_0} \gamma \right) \} \leq 1$$

が成り立たねばならない。故に、すべての λ, μ, γ について上式が成立するためには、

$$-1 + \frac{\delta_t b}{\rho C_p} + \frac{4\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{j_0} \lambda \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{j_0} \mu \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{k_0} \gamma \right) \right\} \leq -1 + \frac{\delta_t b}{\rho C_p} + \frac{12\delta_t K}{\rho C_p (\delta^2)} \leq 1$$

となり、これを整理すれば、

$$\delta_t \leq \frac{2\rho C_p (\delta^2)}{12K + b(\delta^2)} \quad (\text{A.4})$$

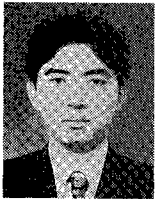
を得る。

(平成 9 年 7 月 24 日受付)



藤原 修 (正員)

昭 46 名工大・工・電子卒。昭 48 名大大学院修士課程了。同年 (株) 日立製作所中央研究所入所。昭 51 同所退職。昭 55 名大大学院博士後期課程了。名大工学部助手。講師を経て、昭 60・4 月名工大・工・助教授。現在、電気情報・教授。平 3~4 スイス連邦工科大客員教授。放電雑音、生体電磁環境、環境電磁工学に関する研究に従事。工博、電気学会、IEEE 各会員。



谷野 正明

平 6 名工大・工・電気情報卒。現在、同大学院博士前期課程在学中。生体電磁環境工学に関する研究に従事。



王 建青 (正員)

昭 59 北京理工大・電子卒。平 3 東北大大学院博士課程了。東北大・工・助手、(株) ソフィアシステムズを経て、現在、名工大・工・助手。環境電磁工学、無線通信工学に関する研究に従事。工博。