

## 研究速報

## 平均固有値展開法による多次元 Unitary ESPRIT の推定値ペアリング

菊間 信良†(正員)      菊地 秀生†(正員)  
 稲垣 直樹†(正員)

Pairing of Estimates Using Mean Eigenvalue Decomposition  
 in Multi-Dimensional Unitary ESPRIT

Nobuyoshi KIKUMA†, Hideo KIKUCHI†,  
 and Naoki INAGAKI†, Members

†名古屋工業大学電気情報工学科, 名古屋市

Department of Electrical and Computer Engineering, Nagoya  
 Institute of Technology, Nagoya-shi, 466-8555 Japan

あらまし 本論文では, 多次元 Unitary ESPRIT における信号パラメータ推定値の簡便なペアリング方法として平均固有値展開法を提案する. 計算機シミュレーションにより, その有効性を示すとともに, 信頼性テストを導入し, 推定精度の確認材料としての有用性を示した.

キーワード 多次元 Unitary ESPRIT, 多重波, 推定値ペアリング, 平均固有値展開, 信頼性テスト

## 1. まえがき

移動通信や室内無線通信等で基地局の設置を効率良く行ったり, 多重伝搬を適切にモデル化するためには電波伝搬構造を詳細に把握する必要がある. そのためには受信点における到来波の数, 到来方向, 伝搬遅延時間などの多重伝搬波の信号パラメータを推定することが有効である. しかし, 実際の電波伝搬環境は非常に複雑であるため, これらの信号パラメータを同時に推定することができる高分解能推定法が要求される. この要求を満たす推定法として, 複数の信号パラメータを同時に推定することができる多次元 Unitary ESPRIT [1] が提案されている. ところが, このアルゴリズムを用いる際, 信号パラメータ推定値の到来波ごとのペアリングが必要となる. このペアリング手法として同時 Schur 分解法 (SSD: Simultaneous Schur Decomposition) [1] や, これと同じ推定精度をもつと報告されている Chain Pairing 法 [2] があるが, これらの手法は多くの繰返し演算を必要とするなどアルゴリズムが複雑であった.

そこで本論文では, そのペアリング手法の一つとして, 簡便で計算効率の良い平均固有値展開法 (MEVD: Mean EigenValue Decomposition) を提案し, 計算機シミュレーションによる多重伝搬波の天頂角, 方位角, 伝搬遅延時間の同時組推定を通して, その有効性に

ついて検討する [3]. また, 1D Unitary ESPRIT [4], [5] においてその有効性が確認されている信頼性テスト [4] が本推定法に導入可能であるので, それを用いた推定値の信頼性の検討結果も併せて示す [3].

## 2. 多重波の 2 次元到来方向と伝搬遅延時間推定

## 2.1 推定原理

ここでは多次元 Unitary ESPRIT を 3 次元信号パラメータ (天頂角, 方位角, 伝搬遅延時間) 推定に適用した場合, すなわち 3D Unitary ESPRIT について述べる.

受信アレーアンテナを  $x$  軸方向に等間隔  $\Delta x$  で  $M_1$  素子,  $y$  軸方向に等間隔  $\Delta y$  で  $M_2$  素子配置した等間隔方形アレーとする. そしてこの方形アレーの各素子において周波数掃引により周波数軸方向に周波数データを等間隔  $\Delta f$  で  $M_3$  点得るものとする. したがって, これは仮想的に 3 次元立体アレーとなる. このアレーに天頂角  $\theta_i$ , 方位角  $\phi_i$ , 伝搬遅延時間  $\tau_i$  をもった多重伝搬波が  $L$  波到来するとする. 更に周波数掃引時の中心周波数に対し周波数掃引帯幅が十分狭い (比帯域が小さい) とすると, この 3 次元アレーの測定点  $(m_1, m_2, m_3)$  ( $1 \leq m_1 \leq M_1, 1 \leq m_2 \leq M_2, 1 \leq m_3 \leq M_3$ ) における複素受信データ  $x_{m_1, m_2, m_3}(t)$  は次のように表される.

$$x_{m_1, m_2, m_3}(t) = \sum_{i=1}^L s_i(t) \prod_{r=1}^3 e^{j[m_r - \{(M_r+1)/2\}] \mu_i^{(r)}} + n_{m_1, m_2, m_3}(t) \quad (1)$$

ただし,  $s_i(t)$  は第  $i$  波のアレー中心における複素振幅,  $n_{m_1, m_2, m_3}(t)$  は内部雑音を表す. また,  $\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \mu_i^{(3)}$  は次のように表され, そのベクトル表記を  $\mu_i$  とする.

$$\mu_i^{(1)} = \frac{2\pi f_c}{c} \Delta x \sin \theta_i \cos \phi_i \quad (2)$$

$$\mu_i^{(2)} = \frac{2\pi f_c}{c} \Delta y \sin \theta_i \sin \phi_i \quad (3)$$

$$\mu_i^{(3)} = -2\pi \Delta f \tau_i \quad (4)$$

$$\mu_i = [\mu_i^{(1)} \ \mu_i^{(2)} \ \mu_i^{(3)}]^T \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, L)$$

ここで,  $c$  は光速,  $f_c$  は周波数掃引時の中心周波数である.

3D Unitary ESPRIT においては, 仮想 3 次元アレーによって得られた複素受信データ  $x_{m_1, m_2, m_3}(t)$

を次のようにベクトル化 (1 次元化) して表す .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_{1,1,1}(t) \cdots x_{M_1, M_2, M_3}(t)]^T \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \in C^{M \times 1} \\ &\quad (M = M_1 M_2 M_3) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで ,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\mu_1) \cdots \mathbf{a}(\mu_L)] \in C^{M \times L} \quad (7)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \cdots s_L(t)]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_{1,1,1}(t) \cdots n_{M_1, M_2, M_3}(t)]^T \quad (9)$$

であり,  $\mathbf{a}(\mu_i)$  は第  $i$  到来波のモードベクトルである . このモードベクトル  $\mathbf{a}(\mu_i)$  の成分は, 中心成分に対し共役対称性をもつので, 次式のように  $M$  次のユニタリ行列  $\mathbf{Q}_M$  によってモード行列  $\mathbf{A}$  を実数値行列  $\mathbf{D}$  に変換することができる [4] .

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}_M^H \mathbf{A} \in R^{M \times L} \quad (10)$$

ユニタリ行列  $\mathbf{Q}_M$  は  $M = 2q$  ( $q$ : 正の整数) の場合

$$\mathbf{Q}_{2q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & j\mathbf{I}_q \\ \mathbf{\Pi}_q & -j\mathbf{\Pi}_q \end{bmatrix} \quad (11)$$

で与えられ,  $M = 2q + 1$  の場合は

$$\mathbf{Q}_{2q+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} & j\mathbf{I}_q \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{\Pi}_q & \mathbf{0} & -j\mathbf{\Pi}_q \end{bmatrix} \quad (12)$$

で与えられる . ただし  $\mathbf{I}_q$  は  $q$  次の単位行列,  $\mathbf{\Pi}_q$  は次式で定義される  $q$  次正方行列である .

$$\mathbf{\Pi}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \mathbf{O} \end{bmatrix} \in R^{q \times q} \quad (13)$$

この実数変換後のモード行列  $\mathbf{D}$  は次のような ESPRIT の基本式 : rotational invariance の関係を満たす [1] .

$$\mathbf{K}_{(r)1} \mathbf{D} \Omega_r = \mathbf{K}_{(r)2} \mathbf{D} \quad (r = 1, 2, 3) \quad (14)$$

ただし,  $\mathbf{K}_{(r)1}$ ,  $\mathbf{K}_{(r)2}$  は以下で定義される行列である .

$$\mathbf{K}_{(r)1} \triangleq \text{Re}\{\mathbf{Q}_{n_r}^H \mathbf{J}_{(r)2} \mathbf{Q}_M\} \in R^{n_r \times M} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{(r)2} \triangleq \text{Im}\{\mathbf{Q}_{n_r}^H \mathbf{J}_{(r)2} \mathbf{Q}_M\} \in R^{n_r \times M} \quad (16)$$

$$n_r = \frac{M(M_r - 1)}{M_r} \quad (17)$$

$$\mathbf{J}_{(1)2} = \mathbf{I}_{M_2 M_3} \otimes \mathbf{J}_2^{(M_1)} \quad (18)$$

$$\mathbf{J}_{(2)2} = \mathbf{I}_{M_3} \otimes \mathbf{J}_2^{(M_2)} \otimes \mathbf{I}_{M_1} \quad (19)$$

$$\mathbf{J}_{(3)2} = \mathbf{J}_2^{(M_3)} \otimes \mathbf{I}_{M_1 M_2} \quad (20)$$

$$\mathbf{J}_2^{(M_r)} = [\mathbf{O}_{(M_r-1) \times 1} \quad \mathbf{I}_{M_r-1}] \quad (21)$$

$(r = 1, 2, 3)$

ここで  $\otimes$  はクロネッカー積を表す . また式 (14) における  $\Omega_r$  は, 所望の信号パラメータ情報を含んだ行列で, 次のような実数値対角行列で表される .

$$\Omega_r = \text{diag} \left\{ \tan \left[ \frac{\mu_i^{(r)}}{2} \right] \right\}_{i=1}^L \quad (r = 1, 2, 3) \quad (22)$$

この  $\Omega_r$  を求めることにより, 信号パラメータを推定することができる .

次にこの実数対角行列  $\Omega_r$  を求める過程を説明する . まず仮想 3 次元アレーにより得られた受信信号ベクトルから次式の相関行列をつくる .

$$\mathbf{R}_{xx} = \text{Re} \{ \mathbf{Q}_M^H E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \mathbf{Q}_M \} \quad (23)$$

行列  $\mathbf{D}$  を構成する  $M$  次元列ベクトルの張る  $L$  次元部分空間 ( $L < M$ ) は,  $\mathbf{R}_{xx}$  の  $L$  個の信号部分空間固有ベクトルの張る部分空間と一致する [1], [5] . したがって,  $\mathbf{E}_S$  を,  $\mathbf{R}_{xx}$  の  $L$  個の信号部分空間固有ベクトルから成る ( $M \times L$ ) 次の実数行列とすると,  $\mathbf{E}_S = \mathbf{D} \mathbf{T}$  を満たす  $L$  次の正則な実数行列  $\mathbf{T}$  が唯一存在する . この式を  $\mathbf{D} = \mathbf{E}_S \mathbf{T}^{-1}$  と変形し, 式 (14) に代入すると次式を得る .

$$\mathbf{K}_{(r)1} \mathbf{E}_S \Psi_r = \mathbf{K}_{(r)2} \mathbf{E}_S \quad (r = 1, 2, 3) \quad (24)$$

$$\Psi_r \triangleq \mathbf{T}^{-1} \Omega_r \mathbf{T} \quad (25)$$

式 (24) から TLS ( Total Least Squares ) 法等 [5] により  $\Psi_r$  を求め, これを固有値展開すると式 (25) からわかるように, その固有値行列として実数対角行列  $\Omega_r$  を得ることができる .

## 2.2 平均固有値展開法

到来波情報を得るためには, 前節で求められたパラメータ ( $\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \mu_i^{(3)}$ ) ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) を到来波ごとにペアリングする必要がある . この推定値ペアリング手法として同時 Schur 分解法 [1] や Chain Pairing 法 [2] などがあるが, 本論文ではより簡便な平均固有値展開法 ( MEVD ) を提案する [3] .

式 (25) より  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  は同じ固有ベクトルをもつので  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  は以下の関係を満たす.

$$\begin{aligned} \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \\ = T^{-1}\Omega_1T + T^{-1}\Omega_2T + T^{-1}\Omega_3T \end{aligned} \quad (26)$$

$$= T^{-1}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)T \quad (27)$$

したがって、 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  の和行列に対し固有値展開を施し、共通の固有ベクトルの行列  $T^{-1}$  を求めた後、 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  それぞれに対する固有値を次式のように求める.

$$\Omega_1 = T\Psi_1T^{-1} \quad (28)$$

$$\Omega_2 = T\Psi_2T^{-1} \quad (29)$$

$$\Omega_3 = T\Psi_3T^{-1} \quad (30)$$

これが平均固有値展開法である. これにより、信号パラメータ推定値のペアリング (結合) が行える. 一般に多次元 ( $R$  次元) Unitary ESPRIT の場合は以下のように処理される.

$$(i) \Psi = \sum_{r=1}^R \Psi_r \text{ の固有ベクトル } T^{-1} \text{ を求める.}$$

$$(ii) \Omega_r = T\Psi_rT^{-1} (1 \leq r \leq R) \text{ から } T^{-1} \text{ によってペアリングされた } \Omega_r \text{ を求める.}$$

### 2.3 信頼性テスト

実際の環境下において信号パラメータ推定を行う際に、その推定された信号パラメータが信頼できるかどうか重要となる. しかしながら、高分解能推定においてその推定値の信頼性を確認することは一般に容易ではない. 一方、1D Unitary ESPRIT では固有値の性質を利用した信頼性テスト (reliability test) が導入され、有効性が報告されている [4]. これは、演算量を増やすことなく容易に推定値の信頼性を確認することができる方法である. この信頼性テストを平均固有値展開法に導入してみる.

本来、式 (22) 及び式 (27) より  $\Psi = \sum_{r=1}^3 \Psi_r$  のすべての固有値は実数値となるはずであるが、スナップショット回数が少ないとき、または入力 SNR が低いとき等はこれらの固有値が常実数であるとは限らない. したがって、得られた固有値が複素数の場合 (0 でない虚部をもつ場合)、推定値の“信頼性はなし”となり、スナップショット回数を増やすなどして再び推定を行う必要があると判断する.

同時 Schur 分解法や Chain Pairing 法では、上記のような信頼性テストの導入は困難であるが、平均固有

表 1 シミュレーション条件  
Table 1 Simulation conditions.

スナップショット回数	10 回
試行回数	500 回
中心周波数	5.2 [GHz]
周波数掃引帯域幅	200 [MHz]

表 2 到来波の到来方向と伝搬遅延時間の設定値  
Table 2 Signal parameters of arriving waves in simulation.

	方位角 ( $\phi$ )	天頂角 ( $\theta$ )	遅延時間 ( $\tau$ )	電力
第 1 波	20 [deg]	20 [deg]	0 [ns]	0 [dB]
第 2 波	45 [deg]	45 [deg]	5 [ns]	0 [dB]
第 3 波	70 [deg]	70 [deg]	10 [ns]	0 [dB]

値展開法はアルゴリズムの構造上その導入が容易である. これが本提案法の特長の一つともいえる.

## 3. 計算機シミュレーション

### 3.1 シミュレーション方法

本提案法を用いて、多重波環境における 2 次元到来方向-伝搬遅延時間組推定の計算機シミュレーションを行った. 到来波間の相互相関係数をすべて 1 (完全相関) とし、相関抑圧のために空間平均法 [1] を 3D Unitary ESPRIT の前処理に適用した. 評価方法としては 2 乗平均誤差 (RMSE: Root Mean Square Error) を用いた.

シミュレーション設定値として、アレー形状をアンテナ数  $2 \times 2$  の等間隔方形アレー (素子間隔は中心周波数の半波長) とし、周波数軸のデータ数を 11 点とした. 空間平均におけるサブアレーの次元は  $2 \times 2 \times 3$  ( $x$  軸  $\times y$  軸  $\times$  周波数軸) とした. その他のシミュレーション条件を表 1 に、多重波の 2 次元到来角、伝搬遅延時間及び電力値を表 2 に示す.

### 3.2 平均固有値展開法の性能検討

まず、平均固有値展開法の性能を検討するために、3D Unitary ESPRIT に対して平均固有値展開法、同時 Schur 分解法及び簡易展開法 ( $\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$  ではなく  $\Psi_1$  のみの固有ベクトル行列を用いて式 (28)~(30) によりパラメータを推定する方法; ad hoc method) [1] を用いた場合の推定結果について比較検討する. なお、同時 Schur 分解法における繰返し演算回数は文献 [1] から 5 回とした.

図 1~図 3 に推定値の RMSE と SNR の関係を表す. ただし、図中の RMSE は、複数の信号パラメータ推定値が得られる状況で三つの手法の推定精度を一元化して比較し、更に RMSE の限界値を表す Cramer-Rao bound (CRB) [1], [6] と比べるため、次式から求

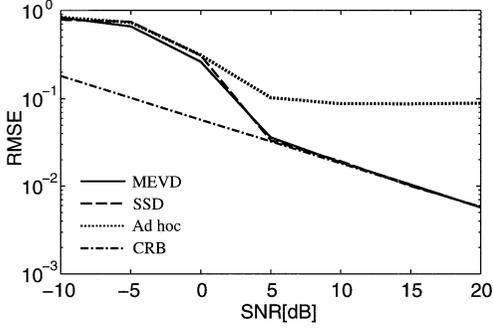


図1 RMSEとSNRの関係(第1波)

Fig.1 RMSE as a function of SNR (Source 1).

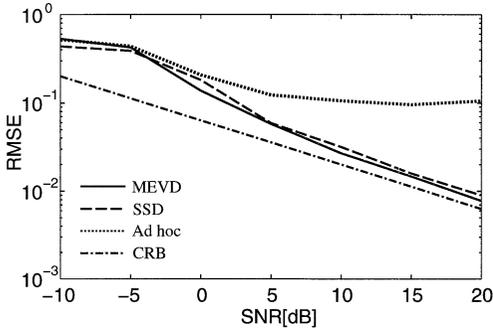


図2 RMSEとSNRの関係(第2波)

Fig.2 RMSE as a function of SNR (Source 2).

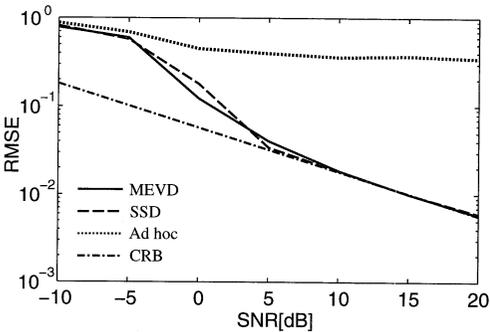


図3 RMSEとSNRの関係(第3波)

Fig.3 RMSE as a function of SNR (Source 3).

めた。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\| \frac{1}{\pi} (\hat{\mu}_{ik} - \mu_i) \right\|^2} \quad (31)$$

ここに、 $\hat{\mu}_{ik}$  は第  $i$  到来波の試行  $k$  回目の推定値ベク

トル、 $\mu_i$  は同到来波の設定値ベクトルで、 $K$  は試行回数である。

図1~図3より、簡易展開法を用いた場合、3波すべてにおいてSNRが5 dBを超えたあたりから推定精度が向上しない。これに対し、平均固有値展開法と同時Schur分解法は、SNRが上昇するにつれ、RMSE値が単調に減少しCramer-Rao boundに接近している。また、平均固有値展開法と同時Schur分解法を比較すると、どのSNRにおいても推定精度がほぼ一致している。しかし、一般に同時Schur分解法は演算処理時間がかかる。参考までに図1~図3における $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ から $T$ と $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ を求めるまでの平均計算時間は、平均固有値展開法が0.8 ms、簡易展開法が0.5 ms、同時Schur分解法が353.6 ms、また図には示していないが、Chain Pairing法は5.8 msであった。このように本提案法の演算処理時間は簡易展開法と同程度で、同時Schur分解法より随分短い。よって、平均固有値展開法は同時Schur分解法よりも容易に信号パラメータをペアリングできるといえる。

### 3.3 信頼性テストの検討

次に、本提案法を用いたシステムにおいて信頼性テストがどの程度の有効性があるかを調べた。シミュレーション条件と多重波の信号パラメータ設定値はそれぞれ表1、表2として、本提案法による2乗平均誤差とSNRの関係を示す図4~図6に示す。この場合の2乗平均誤差は角度の誤差または伝搬遅延時間の誤差と推定失敗率の関係を個別に比較するために次式から求めた。

$$\text{RMSE}_\alpha = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\alpha}_{ik} - \alpha_i)^2} \quad (32)$$

ただし、 $\hat{\alpha}_{ik}$  は第  $i$  到来波の試行  $k$  回目における推定値、 $\alpha_i$  は同到来波の設定値、 $K$  は試行回数で、 $\alpha$  は  $\theta, \phi, \tau$  のいずれかを表す。また、本提案法における推定失敗を、 $\Psi$  の固有値行列  $\Omega$  の対角成分における虚部の絶対値の総和が実部の絶対値の総和に対して  $10^{-6}$  以上となる場合とし、推定失敗率を(推定失敗回数/試行回数)と定義する。図4~図6に対する推定失敗率とSNRの関係を図7に示す。

これらの図より、推定誤差が大きいときの推定失敗率はさほど大きい値を示さないが、各々の信号パラメータにおける推定誤差と推定失敗率は非常に大きな相関があることがわかる。しかも信頼性テストは計算

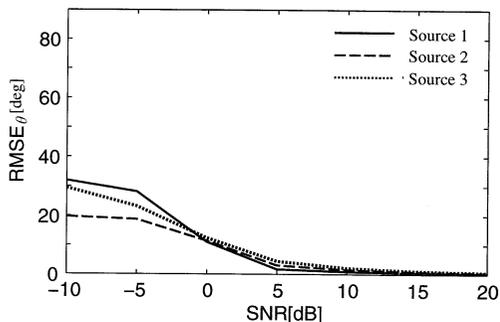


図4 RMSE $_{\theta}$  と SNR の関係 (信頼性テスト使用)  
Fig. 4 RMSE $_{\theta}$  as a function of SNR with the reliability test.

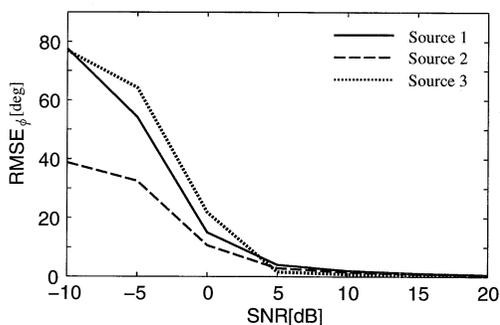


図5 RMSE $_{\phi}$  と SNR の関係 (信頼性テスト使用)  
Fig. 5 RMSE $_{\phi}$  as a function of SNR with the reliability test.

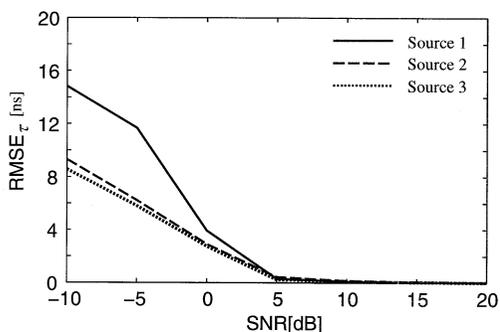


図6 RMSE $_{\tau}$  と SNR の関係 (信頼性テスト使用)  
Fig. 6 RMSE $_{\tau}$  as a function of SNR with the reliability test.

負荷をほとんどかけることなく容易に実行できるので、信頼性の確認材料の一つとして用いる場合、有効であると考えられる。

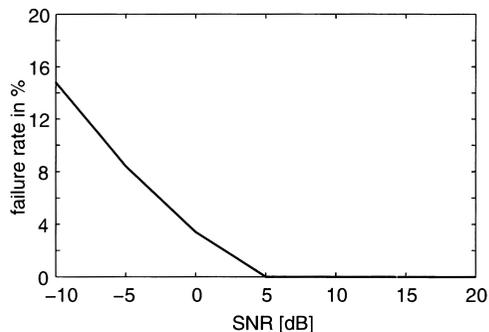


図7 図4-6における推定失敗率とSNRの関係  
Fig. 7 Failure rate as a function of SNR in Figs. 4~6.

### 3.4 到来波分布を変えた場合の検討

表2の到来波分布は、簡易展開法の推定精度が特に劣化する場合である。到来波分布を変化させてシミュレーションを行ってみたところ、同時Schur分解法は5回では収束せず、数百回も繰り返さないと正確な推定値が得られない場合もあった。一方の平均固有値展開法も、到来波の方向によってはSNRが10dB以上であってもRMSEが大きくなる場合があった。しかしながら、平均固有値展開法においてはこのときの推定失敗率が大きくなり、推定結果の信頼性のチェックが可能であることが確認できた。

### 4. むすび

本論文では、複数の信号パラメータを同時に推定することができる多次元Unitary ESPRITのための推定値ペアリング手法として平均固有値展開法を提案し、更に信頼性テストを本提案法に導入した。計算機シミュレーションを通して推定誤差の比較検討を行った結果、簡便ながら本提案法は同時Schur分解法と同程度の推定精度をもち、非常に有用であることが示された。また、信頼性テストの導入によって、推定結果の信頼性を確認することが可能であることも明らかになった。今後、信頼性テストの利用方法について更に検討していく予定である。

### 文 献

- [1] M. Haardt and J.A. Nossek, "Simultaneous Schur Decomposition of Several Nonsymmetric Matrices to Achieve Automatic Pairing in Multidimensional Harmonic Retrieval Problems," IEEE Trans., vol.46, no.1, pp.161-169, Jan. 1998.
- [2] 阪口 啓, 高田潤一, 荒木純道, "3D Unitary ESPRIT法を用いた多重波パラメータの測定法," 信学技報, AP98-35, pp.17-22, July 1998.
- [3] 菊地秀生, 菊間良, 稲垣直樹, "平均固有値展開法によ

る多次元 Unitary ESPRIT の推定値ベアリング；信学技法，AP98-142, pp.89-96, Jan. 1999.

- [4] M. Haardt and J.A. Nossek, "Unitary ESPRIT, How to Obtain Increased Estimation Accuracy with a Reduced Computational Burden," IEEE Trans., vol.43, no.5, pp.1232-1242, May 1995.

- [5] 菊間信良，アレーアンテナによる適応信号処理，科学技術

出版，1998.

- [6] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol.37, pp.720-741, May 1989.

(平成 11 年 3 月 29 日受付，6 月 15 日再受付)