

## 2 次信頼性指標の簡易式

## A SIMPLE FORMULATION FOR SECOND-ORDER RELIABILITY INDEX

趙 衍 剛\*, 小野 徹郎\*\*, 井戸田 秀樹\*\*\*

Yan-Gang ZHAO, Tetsuro ONO and Hideki IDOTA

The complexity of the current formulas of second-order reliability method (SORM) has become an obstacle of their application. In this paper, using the simple parabolic approximation of performance function, a very simple second-order reliability index is suggested and a judge formula of curvature range for which FORM is accurate is proposed for easy practical application of SORM in structural engineering. By the proposed approximations, SORM can be easily applied without rotational transformation and eigenvalue analysis of Hessian matrixes. From several computational examples, the simple second-order reliability index proposed in this paper is shown to be simple and accurate among the existing SORM formulas of closed form, and can generally provide good approximations of exact results for a large range of curvature radius, the number of random variables and the first-order reliability indices.

**Keywords:** structural reliability, reliability index, performance function, FORM, SORM,  
構造信頼性, 信頼性指標, 限界状態関数, 1 次信頼性近似法, 2 次信頼性近似法

## 1. はじめに

構造信頼性理論の基本的な問題は、次の確率積分計算に帰着することができる。

$$P_f = \text{Prob}[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{X}=[x_1, \dots, x_n]^T$  は構造不確定量、 $f(\mathbf{X})$  は  $\mathbf{X}$  の確率密度関数、 $G(\mathbf{X})$  は限界状態関数、 $P_f$  は破壊確率である。

式(1)の確率積分を効率よく計算するために、様々な近似法<sup>[1]</sup>が考えられ、その中でも一次信頼性解析法 (FORM) は、構造信頼性解析の一般的な手法として認識されている<sup>[2]</sup>。FORM では信頼性指標を標準空間における原点から限界状態曲面への最短距離として定義し<sup>[3][4]</sup>、限界状態関数は設計点において線形関数で近似されるので、非線形性が強い限界状態関数のときはその計算結果の精度に問題がある<sup>[5][6]</sup>。

FORM の精度を改善する手法として、2 次信頼性近似法 (SORM) が定着している。SORM は、限界状態曲面を設計点において 2 次曲面で近似することによって、破壊確率を求める手法であり<sup>[5]</sup>、放物面近似に対しては Breitung、Tvedt 等の漸近式<sup>[7][8]</sup>と積分式<sup>[9]</sup>、Hohenbichler、藤田等の重要サンプリング改善<sup>[10][11]</sup>、

Koyluoglu、Cai 等の級数展開式<sup>[12][13]</sup>、趙・小野の経験式<sup>[14]</sup>等が提案されている。これらの手法はいずれも FORM の精度の問題をある程度改善できるが、計算式が複雑で、構造信頼性解析への適用が不便であるのが欠点である。

そこで本報では、SORM を構造信頼性解析に簡便に適用することに着目して、2 次信頼性指標の簡易式を提示する。また、いくつかの数値解析例を通して、簡易式の特徴を考察し、その有効性を示す。

## 2. SORMに関する既往研究

最初に SORM について概説する。既に標準空間に変換された限界状態関数を設計点  $\mathbf{U}^*$  で 2 次 Taylor 級数で展開する。

$$G_S(\mathbf{U}) = \beta_F - \alpha^T \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^*)^T \mathbf{B} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^*) \quad (2)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{\nabla G(\mathbf{U}^*)}{|\nabla G(\mathbf{U}^*)|} \quad \mathbf{B} = \frac{\nabla^2 G(\mathbf{U}^*)}{|\nabla G(\mathbf{U}^*)|} \quad \beta_F = \alpha^T \mathbf{U}^*$$

$\alpha$  は設計点  $\mathbf{U}^*$  での方向ベクトルであり、 $\mathbf{B}$  は設計点  $\mathbf{U}^*$  での 2 次導関数マトリックス、即ち Hessian マトリックスである。 $\beta_F$  は FORM 信頼性指標である。

\* 名古屋工業大学 助教授・工博

\*\* 名古屋工業大学 教授・工博

\*\*\* 名古屋工業大学 助教授・工博

Assoc. Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Nagoya Institute of Technology, Dr. Eng.

構造物の限界状態関数は一般に陽的に表されないで、Hessianマトリックスを求めることはSORMを用いるときの一つの問題点である。この問題に対応するためにDer Kiureghian<sup>[15][16]</sup>等により点合わせ放物面近似 (point-fitting parabolic approximation) が提案され、また、趙・小野<sup>[17]</sup>により直接標準空間での一般的な限界状態曲面の点合わせ法が提案されている。点合わせ限界状態曲面は式(3)で表され、式(2)を直交変換して得られた2次多項式と同じ形式になる<sup>[18]</sup>。

$$G_S(\mathbf{U}) = a_0 + \sum_{j=1}^n (\gamma_j \mu_j + \lambda_j \mu_j^2) \quad (3)$$

ただし、 $a_0, \gamma_j, \lambda_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) は未定係数であり、応答曲面法<sup>[19][20][21]</sup>を標準正規空間に適用して求められる。

式(3)のHessianマトリックスは次式により簡単に求められる。

$$\mathbf{B} = \frac{2}{|\nabla G_S|} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし、

$$|\nabla G_S| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma_j + 2\lambda_j \mu_j^*)^2} \quad (5)$$

式(3)で表す2次限界状態関数に対応する破壊確率の計算には数値積分法<sup>[18]</sup>とIFFT法<sup>[17]</sup>が考えられるが、いずれも陽な表現ではなく、適用に不便である。この2次信頼性近似の陽な記述を得るために、式(2)に対する一般放物面近似<sup>[15][17][8]</sup>と簡易放物面近似<sup>[14]</sup>が提案されている。

一般放物面近似では式(2)に対して2回の直交変換 (座標軸回転と固有値解析) を実行し、次式で式(2)を近似する。

$$G_S(\mathbf{U}) = \beta_F - u_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_j u_j^2 \quad (6)$$

ただし、 $k_j$  ( $j=1, \dots, n-1$ ) は限界状態曲面の設計点での主曲率で、次式の固有値解析から得られる。

$$|\mathbf{A}' - k\mathbf{I}| = 0 \quad (7)$$

$\mathbf{A}'$  は  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H}$  (付録A参照) から第 $n$ 行と第 $n$ 列を消して得られたマトリックスである。

簡易放物面近似では限界状態曲面の設計点での主曲率の和を利用して、次の限界状態関数で式(2)を近似し、一般放物面近似での複雑な2回の直交変換を回避している (付録A参照)。

$$G_S(\mathbf{U}) = \beta_F - u_n + \frac{1}{2R} \sum_{j=1}^{n-1} u_j^2 \quad (8)$$

ただし、 $R$  は限界状態曲面の設計点での平均主曲率半径で、次式から得られる。

$$R = \frac{n-1}{K_S} \quad (9)$$

$$K_S = \sum_{j=1}^n b_{jj} - \alpha^T \mathbf{B} \alpha \quad (10)$$

$K_S$  は限界状態曲面の設計点での主曲率の和であり、 $b_{jj}$  は  $\mathbf{B}$  の対角線要素である。

式(6)の一般放物面近似に対しては Breitung の漸近式<sup>[7]</sup>、Tvedt

の三項式<sup>[8]</sup>、Koyluoglu 等の McLaurin 展開式<sup>[12]</sup>、Cai 等のテーラー展開式<sup>[13]</sup>等が提案されており (付録Bに参照)、式(8)の簡易放物面近似に対して趙・小野の経験式<sup>[14]</sup>が提案されている。しかし、これらの計算式は複雑であり、実用性に欠けている。

### 3. 2次信頼性指標の簡易式

#### 3.1 2次信頼性指標の簡易式

本報では2節に示した計算手法を簡略化するため、簡易放物面近似を用いて2次信頼性指標を近似する。式(8)に対しては次式の2次信頼性指標の経験式<sup>[14]</sup>が提案されている。

$$\beta_S = -\Phi^{-1} \left[ \Phi(-\beta_F) \left( 1 + \frac{\phi(\beta_F)}{R\Phi(-\beta_F)} \right)^{\frac{n-1}{2} \left( 1 + \frac{2K_S}{10(1+2\beta_F)} \right)} \right] \quad K_S \geq 0 \quad (11)$$

$$\beta_S = \left( 1 + \frac{2.5K_S}{2n-5R+25(23-5\beta_F)/R^2} \right) \beta_F + \frac{1}{2} K_S \left( 1 + \frac{K_S}{40} \right) \quad K_S < 0 \quad (12)$$

ただし、 $\Phi, \phi$  はそれぞれ標準正規変数の確率分布と確率密度関数である。 $K_S, R$  はそれぞれ限界状態曲面の設計点での主曲率の和と平均曲率半径であり、式(9)と式(10)により計算される。 $n$  は確率変数の数であり、 $\beta_F, \beta_S$  はそれぞれFORMとSORM信頼性指標である。

式(11)と式(12)の計算にはHessianマトリックスの直交変換と固有値解析を回避しており、一般放物面近似に対する各式 (付録B参照) より簡単かつ正確であることは既に検証されている<sup>[14]</sup>が、平均曲率半径の符号 (限界状態曲面の原点に対する凹凸) によって式表現が全く異なっており、構造信頼性解析に簡便に適用するにはまだ煩雑さが残る。

2次信頼性指標のより簡潔な記述を得るために、まず式(8)で表す限界状態関数の確率モーメントの特徴を考察する。モーメントの定義により、式(8)の6次までの確率モーメントは次式のように得られる。

$$\mu_S = \beta_F + \frac{n-1}{2R} \quad (13)$$

$$\sigma_S^2 = 1 + \frac{n-1}{2R^2} \quad (14)$$

$$\alpha_{3S} \sigma_S^3 = \frac{n-1}{R^3} \quad (15)$$

$$\alpha_{4S} \sigma_S^4 = 3 + \frac{3(n-1)}{R^2} \left( 1 + \frac{n+3}{4R^2} \right) \quad (16)$$

$$\alpha_{5S} \sigma_S^5 = \frac{10(n-1)}{R^3} \left( 1 + \frac{5n+7}{10R^2} \right) \quad (17)$$

$$\alpha_{6S} \sigma_S^6 = 15 + \frac{45(n-1)}{2R^2} \left( 1 + \frac{n+3}{2R^2} + \frac{3n^2+46n+47}{36R^4} \right) \quad (18)$$

ただし、 $\mu_S, \sigma_S$  はそれぞれ  $G_S$  の平均値と標準偏差である。 $\alpha_{3S}, \alpha_{4S}$  はそれぞれ  $G_S$  の3、4次モーメント比であり、それぞれ  $G_S$  の分布形の歪度と尖度を表す。 $\alpha_{5S}, \alpha_{6S}$  はそれぞれ  $G_S$  の5、6次モーメント比である。

式(14)から式(18)を用いて、限界状態関数 $G_s$ の標準偏差 $\sigma_s$ 、3、4、5、6次モーメント比 $\alpha_{3s}$ 、 $\alpha_{4s}$ 、 $\alpha_{5s}$ 、 $\alpha_{6s}$ を計算し、その平均曲率半径 $R$ に依る変化をFig.1に示す。Fig.1により、 $R$ が大きいとき、 $\alpha_{3s}$ が0、 $\alpha_{4s}$ が3、 $\alpha_{5s}$ が0、 $\alpha_{6s}$ が15に近い値になることが分かる。 $\alpha_3=0$ 、 $\alpha_4=3$ 、 $\alpha_5=0$ 、 $\alpha_6=15$ が正規確率変数の特徴であるため、上述の考察から $R$ が大きい時、式(8)の限界状態関数 $G_s$ が近似的に正規確率分布に依ることが分かる。

実用的には限界状態関数の非線形が極めて強いケースが少ないと考え、式(8)の限界状態関数 $G_s$ が持つ確率論的な特徴を近似的に2次モーメントで表す。従って、2次信頼性指標の近似式は次式のように得られる。

$$\beta_s = \frac{\mu_s}{\sigma_s} = \frac{\beta_F + \frac{n-1}{2R}}{\sqrt{1 + \frac{n-1}{2R^2}}} \quad (19)$$

式(19)の形式は、平均曲率半径 $R$ の符号によらず、式(11)、ただし、

(12)及び一般放物面近似に対する各式(付録B参照)と比べて明らかに簡潔である。また、 $R$ が無限大のとき、 $\beta_s = \beta_F$ 、 $R > 0$ のとき、 $\beta_s > \beta_F$ 、 $R < 0$ のとき、 $\beta_s < \beta_F$ 、これらの規則も文献[14]の考察と一致している。

### 3.2 提案簡易式の検証

式(19)の簡易式と式(11)、(12)の経験式とともに式(8)の2次限界状態関数から得られるので、直接式(8)を限界状態関数として簡易式を検証する。式(8)の限界状態関数 $G_s$ は自由度が $n-1$ の $\chi^2$ -分布に依る確率変数と正規確率変数の組み合わせであり、破壊確率の精算値は次式の積分[15]により計算される。

$$P_F = \int_0^\infty \Phi \left[ -\left( \frac{t}{2R} + \beta_F \right) \right] f_{n-1}^2(t) dt \quad (20)$$

$$f_{n-1}^2(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\frac{n-1}{2}}} t^{\frac{n-3}{2}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \quad (21)$$

まず曲率半径 $R > 0$ 、即ち原点に凸となる限界状態曲面に対して検証する。式(20)の精算値、式(11)、(12)の経験式及び本報で提案した式(19)の簡易式から得られた信頼性指標(以下検討した3つの2次信頼性指標という)の計算結果として、確率変数の数、FORM信頼性指標及び曲率半径に依る信頼性指標の変化をそれぞれFig.2, Fig.3, Fig.4に示す。Fig.2とFig.4では、 $\beta_F = 2.0, 3.0, 4.0$ の各FORM信頼性レベル(3本の水平線)に対して検討しており、Fig.3では確率変数の数を8と24にして検討している。計算条件としては、Fig.2とFig.3では曲率半径を5とし、Fig.4では確率変数の数を8とした。これらの図から、以下のような特徴が読みとれる。

1. 信頼性指標の結果はほぼ自由度、FORM信頼性指標及び曲率半径の逆数に正比例する。この変化規則については検討した3つの2次信頼性指標が一致している。
2. 本報で提案した簡易式は式(11)、(12)の経験式より精度がそこなるが、全体的には精算値の信頼性指標に追従しており、FORM信頼性指標をかなり改善している。
3. 曲率半径 $R$ が極めて小さいか、あるいは確率変数の数 $n$ が大きいときは提案した簡

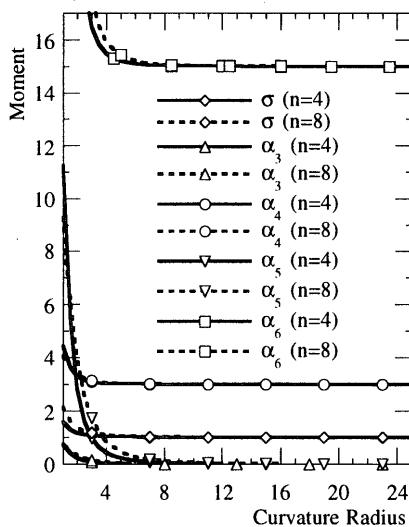


Fig. 1 Variation of moments with respect to curvature radius

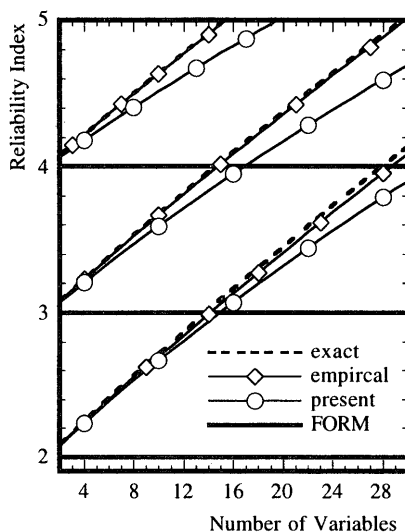


Fig. 2 Variation of reliability index with respect to number of random variables ( $R > 0$ )

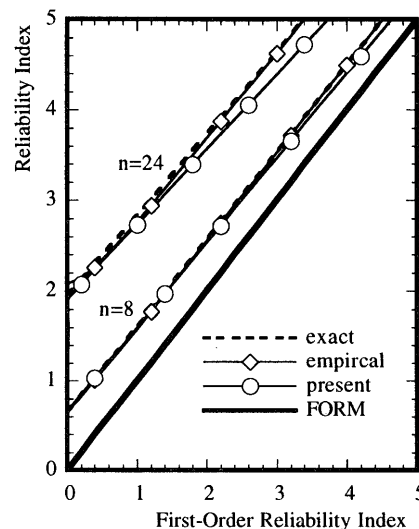


Fig. 3 Variation of reliability index with respect to FORM reliability index ( $R > 0$ )

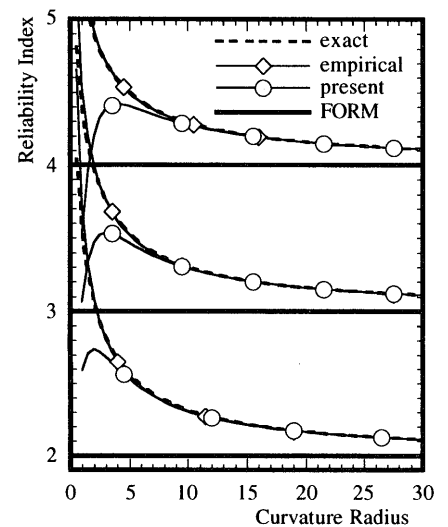


Fig. 4 Variation of reliability index with respect to curvature radius ( $R > 0$ )

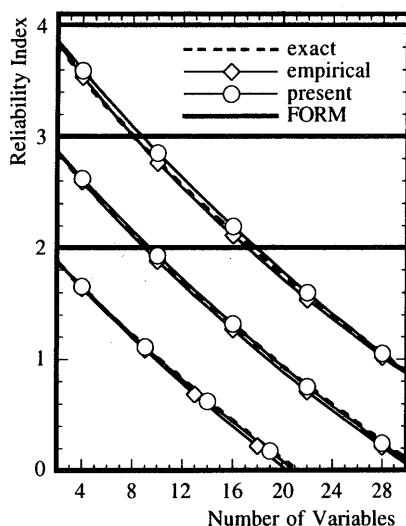


Fig. 5 Variation of reliability index with respect to number of random variables ( $R<0$ )

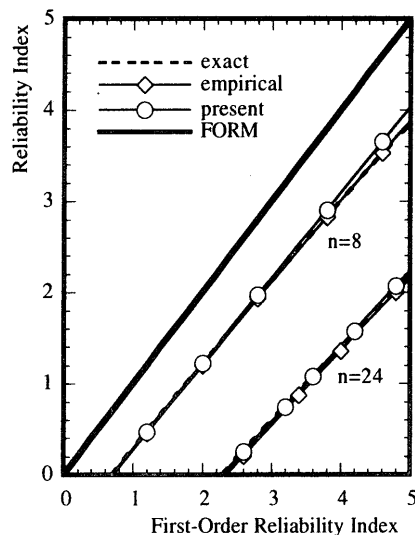


Fig. 6 Variation of reliability index with respect to FORM reliability index ( $R<0$ )

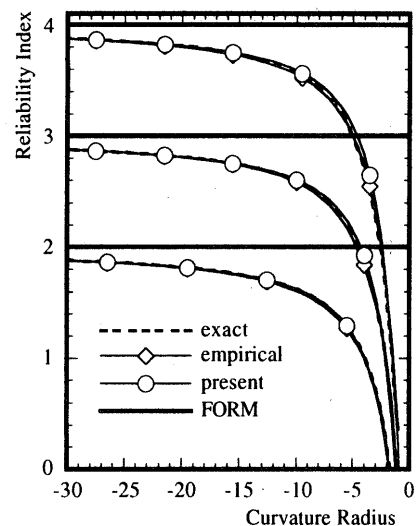


Fig. 7 Variation of reliability index with respect to curvature radius ( $R<0$ )

易式には明らかな誤差が出てくる。このようなケースが工学的には少ないと考える。

次に曲率半径 $R<0$ 、即ち原点に凹となる限界状態曲面に対して検証する。ここでは、Fig.2, Fig.3, Fig.4と同じ計算条件とし、検討した3つの2次信頼性指標の計算結果として、確率変数の数、FORM信頼性指標及び曲率半径に従う信頼性指標の変化をそれぞれFig.5, Fig.6, Fig.7に示す。これらの図によると、信頼性指標の結果はほぼ自由度、FORM信頼性指標及び曲率半径の逆数に正比例する。この変化規則はFig.1, Fig.2, Fig.3と類似しており、この変化規則については検討した3つの2次信頼性指標が一致している。また、曲率半径 $R$ と確率変数の数 $n$ の大きさと関係なく、提案した簡易式は式(11), (12)の経験式及び精算値と精度よく追従しており、FORM信頼性指標をかなり改善している。即ち簡易式は原点に凸となる限界状態曲面より原点に凹となる限界状態曲面に対してより正確な結果を与える。

#### 4. FORMの適用範囲

強い非線形を持つ限界状態関数に対して、FORMの精度の不十分さについては数多く指摘されている<sup>[1][2][4][5][6]</sup>が、FORMの具体的な適用範囲を論及することはほとんどない。ここでは式(19)の2次信頼性指標の簡易式を用いてのFORM適用範囲を検討する。

Fig.4, Fig.7からFORMの結果は曲率半径が十分大きい時しか精算値と接近しないことがわかる。このとき式(14)で表す2次限界状態関数の標準偏差 $\sigma_s$ はほぼ1になり、FORMを検討する2次信頼性指標の簡易式は次式のようになる。

$$\beta_s = \beta_F + \frac{1}{2}K_s = \beta_F + \frac{n-1}{2R} \quad (22)$$

精度については次式で示す信頼性指標の誤差を検討基準とする。

$$\frac{|\beta_s - \beta_F|}{\beta_s} \leq \gamma \quad (23)$$

ただし、 $\gamma$ は信頼性指標の許容誤差である。

式(23)を満足する主曲率の和は次式のように表す。

$$|K_s| \leq 2\gamma\beta_s \quad (24)$$

FORMを検討する範囲では、 $\beta_F$ は $\beta_s$ に近い値になることを考え、FORMの適用範囲は次式で表す。

$$|K_s| \leq 2\gamma\beta_F \quad (25)$$

または、

$$|R| \geq \frac{n-1}{2\gamma\beta_F} \quad (26)$$

式(25), (26)を用いて、FORMの適用範囲を判断することは便利である。例えば、許容誤差 $\gamma$ を0.05にすれば、 $|K_s| \leq 0.1\beta_F$ となり、さらに、確率変数の数が5の場合では、 $|R| \geq 40/\beta_F$ となる。

#### 5. 数値計算例

例1：次の簡単な限界状態関数について限界状態曲面の曲率半径とFORMの精度の関係を考察する。

$$G(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 \quad (27)$$

ただし、 $x_1$ は対数正規確率変数であり、 $\ln(x_1)$ の平均値は $\lambda=1.5$ である。 $x_2$ は正規確率変数であり、平均値と標準偏差がそれぞれ-2.0と1.0である。

$\ln(x_1)$ の標準偏差 $\xi$ をパラメータとして、標準空間での限界状態曲線を示したものがFig.8である、 $\xi$ が大きければ大きいほど限界状態曲線の非線形性は強くなることが分かる。限界状態曲面の設計点での曲率半径、及び式(26)で要求される許容誤差 $\gamma=0.04$ のときの曲率半径の限界値を $\xi$ で整理したものがFig.9である。 $\xi$ が大きくなるに従い（およそ $\xi=0.8$ から）、限界状態曲面の曲率半径が式(26)に要求される限界値を下回ることが分かる。FORM、本論文の提案式及び数値積分による計算結果をFig.10に示す。Fig.10によると、 $\xi$ が大きくなるに従い、FORMの計算結果は数値積分の結果からずれており、本論文の提案式による計算結果はFORMの結果を著しく改良し、数値積分の結果に良い精度で追従している。 $\xi=0.8$ のとき、確率変数の変動係数は0.9以上となり、工学的

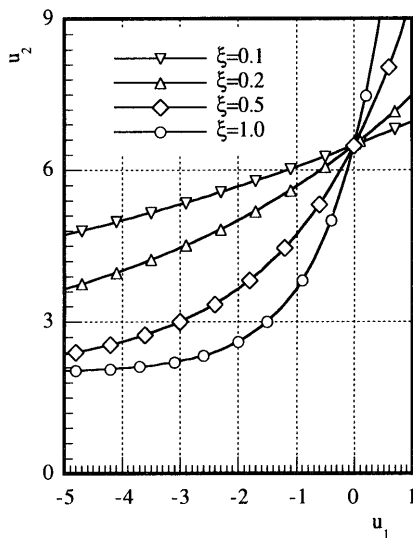


Fig.8 Limit state surface for Example 1

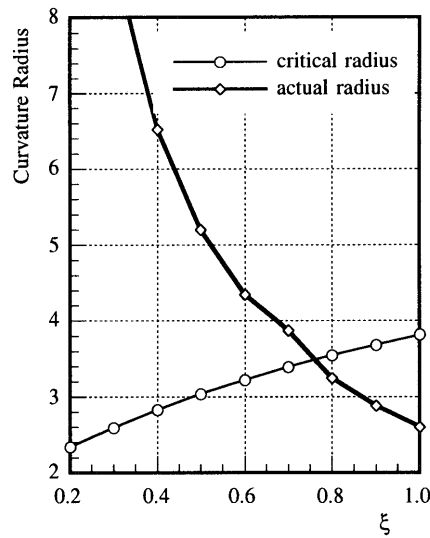


Fig.9 Curvature radius for Example 1

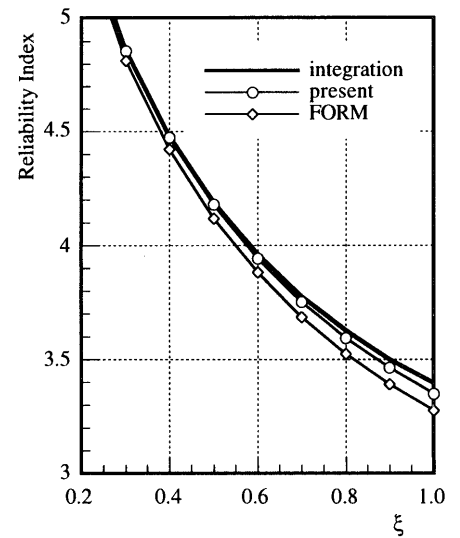


Fig.10 Reliability index for Example 1

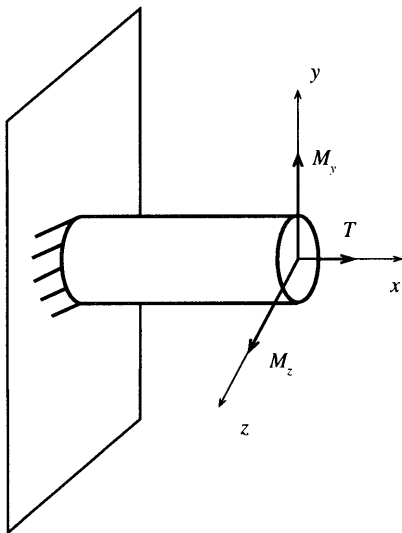
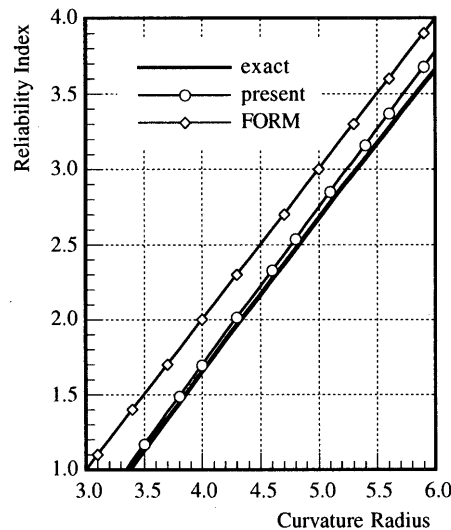
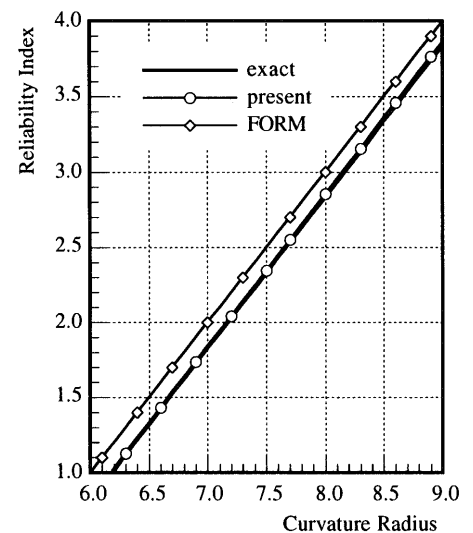


Fig.11 Cantilever beam for Example 2

Fig.12 Reliability index for Example 2 ( $\delta=2$ )Fig.13 Reliability index for Example 2 ( $\delta=5$ )

な範囲を越えていることから、一般には、この程度の簡単な信頼性問題に対しては、FORMは十分な精度を与えられ考える。

例2: Fig.11に示される片持ちばりの信頼性解析を通して、簡易式を考察する。はりの断面を半径が $r$ の円断面とし、 $y, z, x$ 軸にそれぞれ曲げモーメント $M_y, M_z$ と捩れモーメント $T$ が作用した場合を想定する。このとき、せん断応力に関する限界状態は次式で表される<sup>[13]</sup>。

$$M_y^2 + M_z^2 + T^2 \leq M_{\text{yield}}^2 \quad (28)$$

ただし、 $M_{\text{yield}}$ は降伏モーメントである。

$M_y, M_z$ と $T$ をそれぞれ $N(\mu_1, \sigma_1), N(\mu_2, \sigma_2), N(\mu_3, \sigma_3)$ に従う正規確率変数とする。簡単化のため、 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ とし、式(28)の限界状態は次式により表されるものとする。

$$\sum_{j=1}^3 \left( u_j + \frac{\mu_j}{\sigma} \right)^2 \leq \frac{M_{\text{yield}}^2}{\sigma^2} \quad (29)$$

降伏モーメント $M_{\text{yield}}$ とモーメント $M_y, M_z, T$ の標準偏差 $\sigma$ の比率を

$R$ と記し、式(29)に対応する限界状態関数は式(30)となり、限界状態曲面は半径が $R$ 、中心座標が $\{-\mu_1/\sigma, -\mu_2/\sigma, -\mu_3/\sigma\}$ の球面である。

$$G(\mathbf{U}) = R^2 - \sum_{j=1}^3 \left( u_j + \frac{\mu_j}{\sigma} \right)^2 \quad (30)$$

式(30)の限界状態関数 $G(\mathbf{U})$ は自由度数が3の偏心 $\chi^2$ -分布に従い<sup>[22]</sup>、対応するFORM信頼性指標 $\beta_F$ と偏心距離 $\delta$ の間には次式の関係がある<sup>[14]</sup>。

$$\delta^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_j^2}{\sigma_j^2} = (R - \beta_F)^2 \quad (31)$$

この問題を解析するには既存の一般放物面に基づく各計算式を用いる時、複雑な直交変換を行わなければならないが、本報の簡易計算式では、直接 $R$ と $\beta_F$ を用いるので、簡便である。曲率半径 $R$ をパラメータとし、FORM、本論文の提案式及び偏心 $\chi^2$ -分布<sup>[22]</sup>による計算結果を、偏心距離 $\delta=2$ の時についてFig.12に、 $\delta=5$ の時についてFig.13に示す。Fig.12とFig.13によると、曲率半

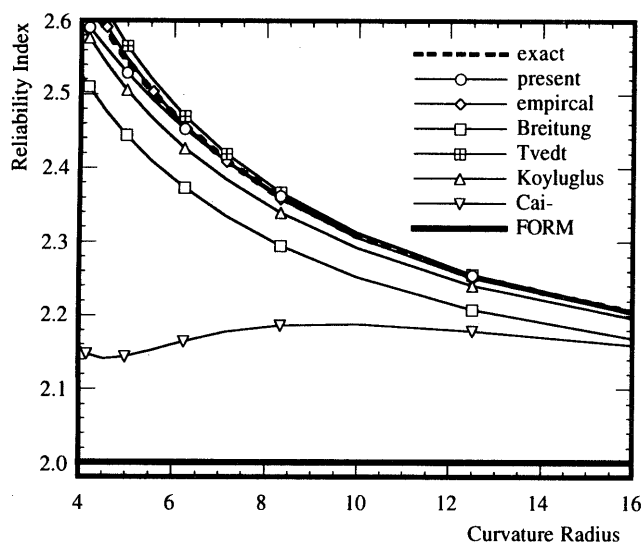


Fig.14 Comparison of second-order Reliability indices for Example 3

径の全考察範囲では、FORMの計算結果は精算値からずれており、本論文の提案式による計算結果はFORMの結果を著しく改良し、精算値をよく追従している。

例3：既に標準空間で直交変換を実行した次の限界状態関数<sup>[16]</sup>について既存のSORM計算式との比較検討を行う。

$$G(\mathbf{U}) = \beta_F - u_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j a u_j^2 \quad (32)$$

式(32)は式(6)の形を有する典型的な一般放物面であり、平均主曲率半径は次式で表される。

$$R = \frac{2}{na} \quad (33)$$

ここでは、曲率半径 $R$ をパラメータとし、本論文の提案式、式(11)の経験式<sup>[14]</sup>、Breitungの漸近式<sup>[7]</sup>、Tvedtの三項式<sup>[8]</sup>、Koyluoglu等のMcLaurin展開式<sup>[12]</sup>及びCai等のテーラー展開式<sup>[13]</sup>（付録B参照）等六つの計算式を用いて2次信頼性指標を計算し、その計算結果と精算値との比較をFig.14に示す。図中の精算値はIFFT<sup>[17]</sup>による結果である。Fig.14により、本論文の提案式は既存の各SORM計算式と比べて簡単ながら、精算値に精度よく追従していることが分かる。

例4：次の限界状態関数についてHohenbichler、藤田等の重点サンプリング改善法<sup>[10][11]</sup>との比較検討を行う。

$$G(\mathbf{X}) = C - \sum_{j=1}^n x_j \quad (34)$$

ただし、 $x_j$ はパラメータを $\lambda=1$ とする指数分布に従う確率変数であり、 $C$ は常数である。 $G(\mathbf{X})$ はGamma分布に従う<sup>[11]</sup>。この限界状態関数の非線形性がかなり強いので、FORMでは十分な結果を与えないと考えられる。

比較のため、文献[11]と同じのパラメータを使用し、Breitungの漸近式、重点サンプリング改善法、式(11)の経験式及び本論文の提案式による計算結果をTable 1に示す。表中、Breitungの漸近式と重点サンプリング改善法の結果は直接文献[11]のTable 1から引用したものであり、曲率半径は点合わせSORM<sup>[17]</sup>により得られたものである。この結果は、考察したあら

Table 1 Computational results for Example 4

Exact $\beta$	$n$	$\beta_F$	$R$	Breitung	Fujita	empirical	present
2.327	2	2.541	-3.557	2.242	2.339	2.360	2.354
	5	2.889	-4.742	2.101	2.295	2.336	2.364
	10	3.239	-6.079	1.899	2.323	2.309	2.360
	20	3.709	-7.976	1.485	2.303	2.319	2.349
3.722	2	3.918	-4.714	3.654	3.727	3.749	3.770
	5	4.255	-5.817	3.546	3.692	3.728	3.800
	10	4.601	-7.102	3.400	3.715	3.727	3.801
	20	5.066	-8.955	3.126	3.701	3.731	3.787
4.756	2	4.942	-5.621	4.699	4.760	4.774	4.815
	5	5.270	-6.658	4.605	4.729	4.785	4.861
	10	5.612	-7.898	4.480	4.749	4.783	4.870
	20	6.079	-9.713	4.254	4.737	4.807	4.862

ゆるのパラメータに対して本論文の提案式が重点サンプリング改善法に匹敵できる結果を与えることが分かる。

## 6. まとめ

本論文で得られた結論は以下の通りである。

(1) SORMを構造信頼性解析に簡便に適用することに着目して、二次信頼性指標の簡易式を提案した。簡易式ではHessianマトリックスの直交変換及び固有値解析を行う必要がなく、既存の各SORM計算式と比べて明らかに簡潔である。

(2) FORMの具体的な適用範囲を明確に判断するために、FORM信頼性指標の精度に関する簡便な判定式を提案した。

(3) 幾つかの例題検討により、提案した簡易式はFORMの計算結果をかなり改善しており、精算値をよく追従している。また、既存の各SORM計算式と比較しても良好な結果を与えている。

(4) 簡易式は原点に凸となる限界状態曲面より原点に凹となる限界状態曲面に対してより正確な結果を与える。

(5) 曲率半径 $R$ が極めて小さいか、あるいは確率変数の数 $n$ が大きいときは提案した簡易式にも誤差が出てくるが、このようなケースは工学的には少ないと考えられ、問題はない。

## 付録A： 簡易放物面近似

式(2)に対して次の直交変換を実行し、変換したあとの目標計算点を $\mathbf{X}^*=[0, 0, \dots, \beta]$ とする。

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (\text{A-1})$$

ただし、 $\mathbf{H}$ は直交マトリックスでその第 $n$ 行の要素は $\alpha$ とし、変換したあとの確率ベクトル $\mathbf{X}$ も相互独立標準正規確率変数である。

そして、 $\mathbf{X}$ 空間における限界状態関数は次式で表す。

$$G_S(\mathbf{X}) = -(x_n - \beta) + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{X}' \\ x_n - \beta_F \end{matrix} \right\}^T \mathbf{A} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{X}' \\ x_n - \beta_F \end{matrix} \right\} \quad (\text{A-2})$$

ただし、 $\mathbf{X}'$ は $n-1$ 次元の確率変数ベクトルで、 $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H}$ 。

$\mathbf{X}^*$ 点を経て、 $x_n - x_i$ 平面を作り、この平面が限界状態曲面を切

断してできた曲線が次式により表される。

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{ni}x_i(x_n - \beta_F) + a_{nn}(x_n - \beta_F)^2 - 2(x_n - \beta_F) = 0 \quad (\text{A-3})$$

$\mathbf{X}^*$ 点でこの曲線の曲率は $k'_i = a_{ii}$ であり、微分幾何原理により、主曲率の和は次式より計算できる。

$$K_S = \sum_{j=1}^{n-1} k_j = \sum_{i=1}^{n-1} k'_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} - a_{nn} \quad (\text{A-4})$$

線形代数の原理により

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii} \quad a_{nn} = \alpha^T \mathbf{B} \alpha \quad (\text{A-5})$$

ゆえに、主曲率の和は次式となる。

$$K_S = \sum_{i=1}^n b_{ii} - \alpha^T \mathbf{B} \alpha \quad (\text{A-6})$$

特別に、式(3)に対しては、主曲率の和は次式となる。

$$K_S = \frac{2}{|\nabla G_S|} \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[ 1 - \frac{1}{(\nabla G_S)^2} (\gamma_j + 2\lambda_{j\mu}^*)^2 \right] \quad (\text{A-7})$$

式(A-6)の導きでは直交変換を用いるが、主曲率の和の計算では全く直交変換を用いず、簡単である。

## 付録B: SORM近似式

### B.1 Breitungの漸近式

$$P_f = \Phi(-\beta_F) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B-1})$$

ただし、 $\beta_F$ はFORM信頼性指標であり、 $k_j$ は主曲率である。

### B.2 Tvedtの3項式

$$P_f = \Phi(-\beta_F) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-\frac{1}{2}} + A_2 + A_3 \quad (\text{B-2})$$

ただし、 $A_2$ 、 $A_3$ は式(B-1)の修正と考えられ、次式で表される。

$$A_2 = [\beta_F \Phi(-\beta_F) - \phi(-\beta_F)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-\frac{1}{2}} - \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (\beta_F + 1)k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$A_3 = (\beta_F + 1) [\beta_F \Phi(-\beta_F) - \phi(-\beta_F)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_F k_j)^{-\frac{1}{2}} - \text{Re} \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (\beta_F + i)k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

### B.3 Koyluoglu等のMcLaurin展開式

$$P_f = [1 - \Phi(\beta_F)] \prod_{j=m}^{n-1} \left( 1 - k_j \frac{\phi(\beta_F)}{\Phi(\beta_F)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \prod_{j=1}^{m-1} \left( 1 + k_j \frac{\phi(\beta_F)}{\Phi(-\beta_F)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \Phi(-\beta_F) \prod_{j=1}^{m-1} \left( 1 + k_j \frac{\phi(\beta_F)}{\Phi(-\beta_F)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \prod_{j=m}^{n-1} \left( 1 - k_j \frac{\phi(\beta_F)}{\Phi(\beta_F)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B-3})$$

ただし、 $k_j > 0, j=1, \dots, m-1, k_j < 0, j=m, \dots, n-1$ 。

### B.4 Cai等のTaylor展開式

$$P_f = \Phi(-\beta_F) - \phi(\beta_F) (D_1 + D_2 + D_3) \quad (\text{B-4})$$

$$D_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j$$

$$D_2 = -\frac{1}{2} \beta_F \left( 3 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^2 + \sum_{j \neq l}^{n-1} \lambda_j \lambda_l \right)$$

$$D_3 = -\frac{1}{6} (\beta_F^2 - 1) \left( 15 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^3 + 9 \sum_{j \neq l}^{n-1} \lambda_j^2 \lambda_l + \sum_{j \neq l \neq m}^{n-1} \lambda_j \lambda_l \lambda_m \right)$$

ただし、 $\lambda_j = k_j/2, j=1, \dots, n-1$ 。

## 参考文献

- [1] Madsen, H.O., Krenk, S. and Lind, N.C., (1986). *Methods of structural safety*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [2] Bjerager, P. (1991). "Methods for structural reliability computation." *Reliability Problems: General Principles and Applications in Mechanics of Solid and Structures*, ed. by F. Casciati, Springer Verlag Wien-New York, 89-136.
- [3] Hasofer, A. M. and Lind, N.C., (1974). "Exact and invariant second-moment code format", *J. Engrg. Mech. Division, ASCE, Vol. 100, No. 1*, 111-121.
- [4] Shinozuka, M., (1983). "Basic analysis of structural safety." *J. of Struct. Engrg., ASCE, Vol. 109, No. 3*, 721-740.
- [5] Fiessler, B., Neumann, H.-J., and Rackwitz, R., (1979). "Quadratic limit states in structural reliability." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 105, No. 4*, 661-676.
- [6] Tichy, M., (1994) "First-order third-moment reliability method." *Structural Safety, Vol. 16*, 189-200.
- [7] Breitung, K., (1984). "Asymptotic approximation for multi-normal integrals." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 3*, 357-366.
- [8] Tvedt, L. (1983), "Two second-order approximations to the failure probability." *Veritas Report RDIV/20-004083*, Det norske Veritas, Oslo, Norway.
- [9] Tvedt, L. (1988), "Second-order reliability by an exact integral." *Proc. 2nd IFIP Working Conference on Reliability and Optimization on structural Systems*, ed. by P. Thoft-Christensen, Springer Verlag, 377-384.
- [10] Hohenbichler, M. and Rackwitz, R., (1988). "Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 114, No. 12*, 2195-2199.
- [11] Fujita, M. and Rackwitz, R., (1988). "Updating first- and second-order reliability estimates by importance sampling." *Structural Engineering and Earthquake Engineering, JSCE, Vol. 5, No. 1*, 53-59.
- [12] Koyluoglu, H.U. and Nielsen, S.R.K., (1994). "New approximations for SORM integrals." *Structural Safety, Vol. 13*, 235-246.
- [13] Cai, G.Q. and Elishakoff, I., (1994). "Refined second-order reliability analysis." *Structural Safety, Vol. 14*, 267-276.
- [14] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "New approximations for SORM: Part 1." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 125, No. 1*, 89-95.
- [15] Der Kiureghian, A., Lin, H.Z. and Hwang, S.J., (1987). "Second-order reliability approximations." *J. Engrg. Mech. ASCE, Vol. 113, No. 8*, 1208-1225.
- [16] Der Kiureghian, A. and De Stefano, M., (1991). "Efficient algorithm for second-order reliability analysis." *J. Engrg. Mech. ASCE, Vol. 117, No. 12*, 2904-2923.
- [17] Zhao, Y.G. and Ono, T., (1999). "New approximations for SORM: Part 2." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 125, No. 1*, 86-93.
- [18] Tvedt, L. (1990), "Distribution of quadratic forms in the normal space - application to structural reliability." *Journal of Engrg. Mech., ASCE, Vol. 116, No. 6*, 1183-1197.
- [19] Faravelli, L. (1989). "Response surface approach for reliability analysis." *J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 115, No. 12*, 2763-2781.
- [20] Bucher, C.G., and Bourgund, U. (1990). "A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems." *Structural Safety, Vol. 7*, 57-66.
- [21] Rajashekhar, M.R., and Ellingwood, B.R. (1993). "A new look at the response surface approach for reliability analysis." *Structural Safety, Vol. 12*, 205-220.
- [22] Johnson, N. I., and Kotz, S., (1970). *Distribution in statistics, continuous univariate distributions-I*, Houghton Mifflin Co. Boston, Mass.

(1998年12月9日原稿受理, 1999年8月27日採用決定)