

純粋状態信号に対する量子最適決定作用素の混合状態信号に対する適用可能性

藤原 祐二[†] 臼田 毅^{†a)} 内匠 逸[†] 畑 雅恭^{††}

Relation between Optimum Quantum Detection Operators for Pure and Mixed-state Signals

Yuji FUJIHARA[†], Tsuyoshi Sasaki USUDA^{†a)}, Ichi TAKUMI[†], and Masayasu HATA^{††}

あらまし 量子情報理論において、信号検出の誤り率を最小とする量子最適受信機を実現することは大きな課題の一つである。量子受信機は決定作用素により表現されるため、量子最適受信機の実現のためには誤り率を最小にする最適決定作用素を導出することが重要である。この最適決定作用素の解析的導出は一般に困難であるが、信号が純粋状態である場合についてはいくつかの具体的な信号系に対して最適決定作用素が得られている。一方、混合状態信号は、古典雑音を含む、より一般的な信号に対応するため、それに対する考察はより重要であると考えられるが、最適決定作用素が得られているのは、2次元系における2元信号やM元対称信号など、ごく基本的な場合のみである。この最適決定作用素に関して、純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対してもかなり良い信号検出過程となりうることが示唆されている。本論文では、これらの示唆に基づき、純粋状態信号に対する最適決定作用素を混合状態信号に対し、どの程度まで適用できるかについて調べる。

キーワード 量子情報理論, 量子最適受信機, 量子信号検出理論, 混合状態

1. ま え が き

量子情報理論において、信号検出の誤り率を最小とする量子最適受信機を実現することは大きな課題の一つである [1], [2]。量子受信機による信号の測定及び決定過程はヒルベルト空間上に定義される決定作用素で表される。したがって、量子最適受信機の実現のために、最適決定作用素を導出することは重要である。量子信号検出理論の枠組は Helstrom, Holevo, Yuenらによって構築され [1], [3] ~ [6], 最適決定作用素の必要十分条件が量子ベイズ決定規範として明らかにされている。一般に量子ベイズ決定規範による最適決定作用素の解析的導出は困難であるが、先験確率の等しい純粋状態信号については、いくつかの具体的な信号系に対して、既に最適決定作用素が求められている [7] ~

[13]。特に、任意の2元信号, M元対称信号, 2元線形符号など、多くの信号の最適決定作用素が、いわゆる Square-root measurement [14] ~ [16] となることが明らかにされている [10] ~ [13]。Square-root measurement は信号量子状態が与えられるとシステムティックに導出される特長がある。一方、混合状態信号については古典雑音を含む、より一般的な信号に対応するため、最適決定作用素の導出は応用上重要であると考えられるが、その解析解が得られているのは、スピン1/2系など量子系を表すヒルベルト空間の次元が2次元である場合(2次元系)の2元信号 [17], [18], M元対称信号 [13] など、ごく基本的な場合のみである。また、Square-root measurement は、信号が純粋状態か混合状態かにかかわらず定義されるが、混合状態信号に対しては、純粋状態信号に対して最適となる2元信号などでも一般には最適とならず [18], これまで、混合状態信号の最適決定作用素は、信号からシステムティックに導出されるというよりは、信号個々に導出しなければならなかった。

さて、この最適決定作用素に関して、純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対しても

[†] 名古屋工業大学知能情報システム学科, 名古屋市
Dept. of A.I. and Computer Science, Nagoya Institute of
Technology, Nagoya-shi, 466-8555 Japan

^{††} 愛知県立大学情報科学部, 愛知県
Dept. of Applied Information Technology, Aichi Prefectural
University, Aichi-ken, 480-1198 Japan

a) E-mail: usuda@ics.nitech.ac.jp

かなり良い信号検出過程となりうるものが最近、佐々木、大崎らにより示唆されている [13], [19]. 特に [13] では、スピン 1/2 系における M 元対称信号の最適決定作用素が信号が純粋状態から混合状態に変わっても同一である場合が存在することが示されている.

本論文では、これらの示唆に基づき、純粋状態信号に対する最適決定作用素を混合状態信号に対し、どの程度まで適用できるかについて調べる。まず、混合状態信号が与えられたとき、そのスペクトル分解における主要な項以外を 0 にするという意味で、古典雑音を 0 にした極限として対応する純粋状態信号を考え、混合及び純粋状態信号の最適決定作用素の関係を明らかにする。次に、与えられた純粋状態信号に対し、その純粋状態の統計的混合という意味で古典雑音（古典確率）を含んだ混合状態信号を考え、この場合についても同様の考察を行う。

2. 誤り率最小化問題

本章では、文献 [1] ~ [5] に基づき、量子情報理論における誤り率最小化問題について概観する。

2.1 量子通信システム

量子情報理論において、 M 元の古典情報 $\{x_i | i = 0, 1, \dots, M-1\}$ の送受信を行う場合、送信側で M 個の量子状態 $\{\rho_i\}$ を用意し、各情報に対応させる。それぞれの量子状態は量子伝送通信路を通して送信される。送信されてきた量子状態は量子受信機によって測定・決定され、出力される（図 1）。この量子測定の過程において、信号のもつ量子ゆらぎによる雑音が顕在化するため、量子受信機における測定過程は一種の雑音のある通信路とみなすことができる。これを量子測定通信路という。各量子状態は、量子系を表すヒルベルト空間上のエルミート作用素で表され、以下の条件を満たす。

$$\hat{\rho}_i \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Tr} \hat{\rho}_i = 1 \quad (2)$$

量子状態には純粋状態と混合状態がある。 $\text{Tr} \hat{\rho}_i^2 = 1$ のときは、純粋状態となり、古典雑音を含まない状態を表す。一方、 $\text{Tr} \hat{\rho}_i^2 < 1$ のときは、混合状態となり、古典雑音を含む状態を表すため、より一般的な状態であると言える。

また、量子受信機は、次式のような単位分解を満たすヒルベルト空間上の非負エルミート作用素 $\{\hat{\Pi}_j\}$ で

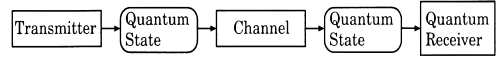


図 1 量子情報理論における通信路モデル

Fig. 1 Channel model of quantum communication system.

表される。

$$\hat{\Pi}_j \geq 0 \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} \hat{\Pi}_j = \hat{I} \quad (4)$$

ただし、 \hat{I} は恒等作用素である。この $\hat{\Pi}_j$ は決定作用素と呼ばれ、受信信号を $\hat{\rho}_j$ であると決定する信号検出過程を表す。一般には、決定作用素の数は信号の数と等しい必要はないが、ここでは誤り率のみに着目するため、両者は等しいとした。いま、信号 $\hat{\rho}_i$ が送信されたとき、受信側で $\hat{\rho}_j$ と決定される条件付き確率を $P(j|i)$ とすると

$$P(j|i) = \text{Tr} \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_j \quad (5)$$

と表される。ただし、量子伝送通信路には雑音がないものと仮定した。雑音が存在する場合には、量子伝送通信路の出力の量子状態を改めて $\hat{\rho}_i$ と表すことにより同様の議論ができる [20], [21]。以上より、量子情報理論における量子測定通信路の誤り率は次式により表される。

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \text{Tr} \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i \quad (6)$$

ここで、 ξ_i は各信号の先験確率である。上式を最小にする決定作用素を見出すことが量子情報理論における誤り率最小化問題であり、その解は最適決定作用素により与えられる。

2.2 量子ベイズ決定規範

誤り率を最小にする最適決定作用素は、次式のような量子ベイズ決定規範 [3], [5], [22] による必要十分条件を満たすことが知られている。

$$\hat{\Pi}_i (\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j) \hat{\Pi}_j = 0, \quad \forall i, j \quad (7)$$

$$\hat{I} - \xi_i \hat{\rho}_i \geq 0, \quad \forall i \quad (8)$$

ただし、

$$\hat{I} = \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i \quad (9)$$

である。

3. 信号の古典雑音を無くした極限として純粋状態信号を定義した場合

本章では、与えられた混合状態信号の古典雑音を 0 にした極限である純粋状態信号の最適決定作用素が、混合状態に適用可能である場合について考察する。

3.1 d 次元系における M 元混合状態信号

量子系を表すヒルベルト空間の次元を d とする。 M 元混合状態信号を $\{\hat{\rho}_i | i = 0, 1, \dots, M-1\}$ とし、 $\hat{\rho}_0$ の固有値を $f_k (f_0 \geq f_1 \geq \dots \geq f_{d-1})$ 、固有ベクトルを $|\lambda_k\rangle$ とすると $\hat{\rho}_0$ は以下のように表すことができる。

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{k=0}^{d-1} f_k |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \quad (10)$$

上式において、 f_k は信号に含まれる古典雑音の大きさに対応する値であり、 $f_k = 1/d, (k = 0, 1, \dots, d-1)$ のときに最も古典雑音の大きい状態であると言える。したがって、 f_k の分布は、状態 $\hat{\rho}_0$ の混合の割合を表していると言える。以下、本論文で状態の混合度が等しいと言えば、固有値分布が等しいことを指すものとする。ここで、簡単のため各信号がユニタリ変換で関係づけられており、各信号の混合度は等しいものとする。

$$\hat{\rho}_i = \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^\dagger \quad (11)$$

ただし、 \hat{U}_i はユニタリ作用素である。ここで、この混合状態信号に対応する純粋状態信号 $\{\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} | i = 0, 1, \dots, M-1\}$ を以下のように定義する。

$$\hat{\rho}_0^{(\text{pure})} = |\lambda_0\rangle\langle\lambda_0| \quad (12)$$

$$\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} = \hat{U}_i \hat{\rho}_0^{(\text{pure})} \hat{U}_i^\dagger \quad (13)$$

これは、式 (10) における主要な項 $f_0 |\lambda_0\rangle\langle\lambda_0|$ のみを残し、 $f_0 \rightarrow 1, f_k \rightarrow 0 (k = 1, 2, \dots, d-1)$ とした状態、すなわち信号に含まれる古典雑音を 0 にした極限であると考えられる。

3.2 準備

純粋状態信号についての最適決定作用素を混合状態信号に対して適用した場合について考える。このとき、純粋状態信号に対する最適決定作用素 $\{\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}\}$ が、混合状態信号に対して量子ベイズ決定規範の条件式を満たせば、 $\{\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}\}$ は混合状態信号に対しても最適であると言える。そこで、純粋状態信号についての最

適決定作用素が混合状態信号に対して式 (7), (8) のような条件式を満たすかどうか調べてみる。そのための準備として、まず $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ の構造を明らかにする。

$$\begin{aligned} \xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j &= \xi_i \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j \hat{\rho}_0 \hat{U}_j^\dagger \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} f_k \hat{A}_{i,j,k} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、

$$\hat{A}_{i,j,k} = \xi_i \hat{U}_i |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \hat{U}_j^\dagger \quad (15)$$

である。特に

$$\hat{A}_{i,j,0} = \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})} \quad (16)$$

また

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d-1} \hat{A}_{i,j,k} &= \xi_i \hat{U}_i \sum_{k=0}^{d-1} |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \hat{U}_i^\dagger \\ &\quad - \xi_j \hat{U}_j \sum_{k=0}^{d-1} |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \hat{U}_j^\dagger \\ &= \xi_i \hat{U}_i \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j \hat{U}_j^\dagger \\ &= (\xi_i - \xi_j) \hat{I} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。式 (17) より

$$\hat{A}_{i,j,d-1} = (\xi_i - \xi_j) \hat{I} - \sum_{k=0}^{d-2} \hat{A}_{i,j,k} \quad (18)$$

となり、式 (14), (18) より $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ は次式で表されるような構造になっていることがわかる。

$$\begin{aligned} \xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j &= \sum_{k=0}^{d-2} f_k \hat{A}_{i,j,k} + f_{d-1} \left\{ (\xi_i - \xi_j) \hat{I} - \sum_{k=0}^{d-2} \hat{A}_{i,j,k} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{d-2} (f_k - f_{d-1}) \hat{A}_{i,j,k} + f_{d-1} (\xi_i - \xi_j) \hat{I} \end{aligned} \quad (19)$$

以上の結果を用いて、以下では、純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対しても最適となる場合について、具体的に述べる。

3.3 2次元系

ここでは、信号系が 2 次元ヒルベルト空間で表される場合について考える。このような信号系の例としては、スピン $1/2$ 系、2 準位原子系、偏光系などが考え

られる．まず，純粋状態信号に対する最適決定作用素 $\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}$ は以下のような量子ベイズ決定規範による条件を満たす．

$$\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}(\xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})} - \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})}) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} = 0, \quad \forall j, i \quad (20)$$

$$\hat{\Gamma}^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})} \geq 0, \quad \forall j \quad (21)$$

ただし

$$\hat{\Gamma}^{(\text{pure})} = \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \quad (22)$$

である．いま，信号系は 2 次元 ($d = 2$) であるので，式 (19) は以下のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} \xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j &= (f_0 - f_1) \hat{A}_{i,j,0} + f_1 (\xi_i - \xi_j) \hat{I} \\ &= (f_0 - f_1) (\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}) \\ &\quad + f_1 (\xi_i - \xi_j) \hat{I} \end{aligned} \quad (23)$$

以上より， $\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}$ を混合状態信号に対して適用した場合の，量子ベイズ決定規範の条件式は以下になる．まず，式 (7) に対応する，一つ目の条件式は，式 (20)，(23) より

$$\begin{aligned} &\hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} (\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j) \hat{\Pi}_j^{(\text{pure})} \\ &= (f_0 - f_1) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} (\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}) \hat{\Pi}_j^{(\text{pure})} \\ &\quad + f_1 (\xi_i - \xi_j) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \hat{\Pi}_j^{(\text{pure})} \\ &= f_1 (\xi_i - \xi_j) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \hat{\Pi}_j^{(\text{pure})} \end{aligned} \quad (24)$$

となる．上式は，任意の i, j について $\xi_i - \xi_j = 0$ となるとき，あるいは $\hat{\Pi}_i^{(\text{pure})}$ と $\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}$ が直交するとき 0 となり，条件を満たす．また，式 (8) に対応する二つ目の条件式については，

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma} - \xi_j \hat{\rho}_j \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \\ &= (f_0 - f_1) \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \\ &\quad + f_1 \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_i - \xi_j) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (f_0 - f_1) (\hat{\Gamma}^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}) \\ &\quad + f_1 \sum_{i=0}^{M-1} (\xi_i - \xi_j) \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \end{aligned} \quad (25)$$

となる．ただし

$$\hat{\Gamma} = \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \hat{\rho}_i \hat{\Pi}_i^{(\text{pure})} \quad (26)$$

である．式 (21) より， $\sum_{i=0}^{M-1} (\xi_i - \xi_j) \geq 0$ なら条件は満たされるが，そのためには，任意の i, j について $\xi_i - \xi_j = 0$ を満たせば十分である．したがって，任意の i, j について $\xi_i = \xi_j$ (先験確率が等確率) であれば，二つの条件式は満たされる．

以上より，2 次元系においては，各信号の混合度が等しく，先験確率が等確率であれば，純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対しても誤り率最小を与える測定過程となると言える．

3.4 d 次元系

次に d 次元系において，純粋状態の最適決定作用素が混合状態に適用できる場合について考察する．まず，式 (19) は以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned} &\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j \\ &= (f_0 - f_{d-1}) \hat{A}_{i,j,0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{d-2} (f_k - f_{d-1}) \hat{A}_{i,j,k} + f_{d-1} (\xi_i - \xi_j) \hat{I} \end{aligned} \quad (27)$$

上式において

$$\sum_{k=1}^{d-2} (f_k - f_{d-1}) \hat{A}_{i,j,k} = 0 \quad (28)$$

で，更に信号の先験確率が等確率であれば， $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ は $\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}$ に比例することとなり，その結果，2 次元系の場合と同様に量子ベイズ決定規範の条件式を満たすことになる．式 (28) を満たすためには

$$f_k - f_{d-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, d-2 \quad (29)$$

であれば十分である．これは，式 (10) で表される信号量子状態 $\hat{\rho}_0$ において， f_0 以外の f_1 から f_{d-1} のすべての値が等しいような場合に相当する．このとき， $f_1 = f_2 = \dots = f_{d-1} = P$ とおけば，信号は次式の

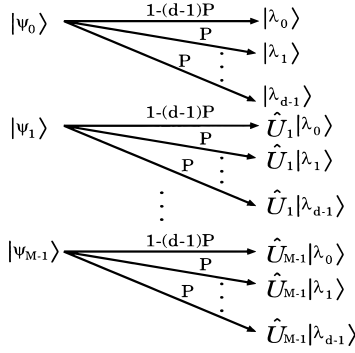


図2 d次元系において純粋状態の最適決定作用素が適用可能な混合状態信号
Fig.2 The mixed-state signals in d-dimensional space, to which the optimum detection operators for pure-state signals are applicable.

ように表される .

$$\hat{\rho}_0 = \{1 - (d - 1)P\}|\lambda_0\rangle\langle\lambda_0| + P \sum_{k=1}^{d-1} |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \quad (30)$$

$$\hat{\rho}_i = \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^\dagger \quad (31)$$

この場合、信号は式 (29) を満足する .

以上より、各信号の混合度と先験確率が等しく、信号の固有値の最大値以外が一様であれば、純粋状態信号の最適決定作用素が混合状態信号に対しても最適となると言える . そのような信号は、式 (30), (31) より、何らかの原因で、送信した純粋状態信号と直交する状態が一定の確率で伝送されてしまう場合と解釈できる . これは純粋状態信号を $\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ と表すと、図2のような通信路モデルで表すことができる [2] . これは例えば、送信機 (変調器) のエラーによって、送信すべき純粋状態信号と異なる状態が送信される場合などに対応すると考えられるが、具体的な信号系との対応を明らかにすることは今後の課題である .

4. 純粋状態の統計的重ね合わせとして混合状態信号を定義した場合

前章までの議論においては、混合状態信号のスペクトル分解の主要な項以外を0にするという意味で、古典雑音を0にした極限として純粋状態信号を定義していた . これに対して、もともと与えられた純粋状態信号の重ね合わせとして混合状態信号が生じる場合も考えられる . これは、何らかの原因、例えば送信機のエ

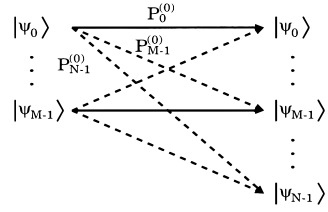


図3 純粋状態の重ね合わせによる混合状態信号
Fig.3 The mixed-state signals which are statistical mixture of given pure-state signals.

ラーによって、純粋状態信号を送信したにもかかわらず、一定の確率で他の量子状態が伝送されてしまう場合などに対応する .

4.1 純粋状態の重ね合わせによる混合状態信号

M元純粋状態信号 $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, \dots, |\psi_{M-1}\rangle\}$ とどの信号でもない状態 $\{|\psi_M\rangle, |\psi_{M+1}\rangle, \dots, |\psi_{N-1}\rangle\}$ を考える . ただし、 $M \leq N$ である . 考えるべき混合状態信号はこれらの量子状態の統計的重ね合わせであるので

$$\hat{\rho}_i = \sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(i)} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (32)$$

となる . ただし、 $P_k^{(i)}$ は古典確率であり、 $0 \leq P_k^{(i)} \leq 1$ 、 $\sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(i)} = 1$ を満たす . 式 (32) は純粋状態 $|\psi_k\rangle$ が $P_k^{(i)}$ の確率で混合している状態を表している . この場合の純粋状態信号は

$$\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (33)$$

と表される . したがってこれらの信号は図3のような通信路モデルで表すことができる [2] .

ここでも、各信号は以下のようにユニタリ作用素で関連づけられており、混合度は等しいものと仮定する .

$$\hat{\rho}_i = \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^\dagger \quad (34)$$

$$\hat{\rho}_i^{(\text{pure})} = \hat{U}_i \hat{\rho}_0^{(\text{pure})} \hat{U}_i^\dagger \quad (35)$$

4.2 準備

このような信号系について、純粋状態信号の最適決定作用素の混合状態信号に対する適用可能性について調べるために、3. の場合と同様に純粋状態信号の最適決定作用素が混合状態信号に対して量子ベイズ決定規範の条件式を満たすかどうかを調べる . その準備として $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ の構造を調べる .

$$\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j = \xi_i \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j \hat{\rho}_0 \hat{U}_j^\dagger$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(0)} \hat{B}_{i,j,k} \quad (36)$$

ただし

$$\hat{B}_{i,j,k} \equiv \xi_i \hat{U}_i |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \hat{U}_j^\dagger, \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (37)$$

である．特に，

$$\hat{B}_{i,j,0} = \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})} \quad (38)$$

更に， $\hat{B}_{i,j,k}$ の k が 0 から $M-1$ までの和は，グラム作用素

$$\hat{\Phi} = \sum_{i=0}^{M-1} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (39)$$

によって以下のように表される．

$$\sum_{k=0}^{M-1} \hat{B}_{i,j,k} = \xi_i \hat{U}_i \hat{\Phi} \hat{U}_i^\dagger - \xi_j \hat{U}_j \hat{\Phi} \hat{U}_j^\dagger \quad (40)$$

以上の結果を用いて，純粋状態信号に対する最適決定作用素を混合状態信号に対して適用できる場合の具体例について考察する．

さて，式 (40) において \hat{U}_i と $\hat{\Phi}$ が可換であれば，式は $\xi_i - \xi_j$ に比例し，前章と同様の議論ができる．文献 [10] によると，信号が群共变的であれば \hat{U}_i と $\hat{\Phi}$ は可換となる．そこで，以下では信号が群共变的である場合について考える．群共变的信号の例としては， M 相 PSK コヒーレント状態信号， M 元直交信号，2 元線形符号などがある [10], [23], [24]．群共变的信号の定義は以下のとおりである [23]．

定義（群共变的信号）

信号系 $\{\hat{\rho}_i | i \in G\}$ に対し，信号系を特徴付けるパラメータの集合 G をある演算 \circ の定義された群 $(G; \circ)$ とする．このとき

$$\hat{U}_k \hat{\rho}_i \hat{U}_k^\dagger = \hat{\rho}_{k \circ i} \quad \forall i, k \in G \quad (41)$$

となるようなユニタリ作用素 \hat{U}_k が存在すれば，信号系 $\{\hat{\rho}_i | i \in G\}$ は群共变的であるという．

4.3 純粋状態信号の最適決定作用素が適用できるための条件

いま信号は群共变的であるので，式 (34)，(35) における \hat{U}_i は群の表現となっている．このとき

$$\hat{U}_i \hat{\Phi} \hat{U}_i^\dagger = \hat{U}_i \sum_{k=0}^{M-1} |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \hat{U}_i^\dagger$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} |\psi_{i \circ k}\rangle \langle \psi_{i \circ k}| \\ = \hat{\Phi} \quad (42)$$

が成り立つ．よって，式 (40)，(42) より

$$\sum_{k=0}^{M-1} \hat{B}_{i,j,k} = \xi_i \hat{\Phi} - \xi_j \hat{\Phi} = (\xi_i - \xi_j) \hat{\Phi} \quad (43)$$

$$\sum_{k=1}^{M-1} \hat{B}_{i,j,k} = (\xi_i - \xi_j) \hat{\Phi} - \hat{B}_{i,j,0} \quad (44)$$

と書ける．

3. の議論より，純粋状態信号の最適決定作用素が，混合状態信号に対して量子ベイズ決定規範の条件を満たすためには $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ が $\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}$ と比例していればよい．そのための十分条件の一つとして，以下が挙げられる．

$$P_k^{(0)} = P_{k'}^{(0)}, \quad k, k' = 1, 2, \dots, M-1 \quad (45)$$

$$P_0^{(0)} \geq P_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, M-1 \quad (46)$$

$$\sum_{k=M}^{N-1} P_k^{(0)} \hat{B}_{i,j,k} = 0 \quad (47)$$

$$\xi_i = \xi_j, \quad \forall i, j \quad (48)$$

これらの条件を満たすとき

$$\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j \\ = P_0^{(0)} \hat{B}_{i,j,0} + \sum_{k=1}^{M-1} P_k^{(0)} \hat{B}_{i,j,k} \\ = P_0^{(0)} \hat{B}_{i,j,0} + P_1^{(0)} \sum_{k=1}^{M-1} \hat{B}_{i,j,k} \\ = P_0^{(0)} \hat{B}_{i,j,0} + P_1^{(0)} \{(\xi_i - \xi_j) \hat{\Phi} - \hat{B}_{i,j,0}\} \\ = (P_0^{(0)} - P_1^{(0)}) \hat{B}_{i,j,0} \\ = (P_0^{(0)} - P_1^{(0)}) (\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}) \quad (49)$$

となり， $\xi_i \hat{\rho}_i - \xi_j \hat{\rho}_j$ は $\xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{pure})} - \xi_j \hat{\rho}_j^{(\text{pure})}$ と比例している．したがって，純粋状態信号に対する最適決定作用素を $\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}$ とすれば，3.4 と同様に，混合状態信号 $\hat{\rho}_i$ に対して $\hat{\Pi}_j^{(\text{pure})}$ は量子ベイズ決定規範によ

る条件を満たす。式 (45) は、他の純粋状態信号が伝送されてしまう確率が等確率であれば満たされる。また、式 (46) は正しい純粋状態が伝送される確率が、送信エラーにより他の純粋状態信号が伝送される確率よりも高ければ満たされる。このためには

$$P_0^{(0)} \geq \frac{1}{M} - \frac{1}{M} \sum_{k=M}^{N-1} P_k^{(0)} \quad (50)$$

であればよい。式 (47) については、信号以外の状態が伝送されることがなく、 $P_k^{(i)} = 0, k \geq M$ ならば満たされるが、あるいは

$$\hat{U}_i |\psi_k\rangle = |\psi_k\rangle, k = M, M+1, \dots, N-1 \quad (51)$$

であれば、式 (48) のもとで $\hat{B}_{i,j,k} = 0, k \geq M$ となるため満たされる。これは、例えば、 M 相 PSK コヒーレント状態信号に対しては、何らかの原因により何も伝送されなかった（真空状態が伝送された）場合に対応する。実際、 M 相 PSK コヒーレント状態信号に対するユニタリ作用素は光子消滅（生成）作用素を $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ とすれば

$$\hat{U}_k = \exp\left[\frac{2k\pi i}{M} \hat{a}^\dagger \hat{a}\right] \quad (52)$$

となるが、これは真空状態 $|0\rangle$ に対し

$$\hat{U}_k |0\rangle = |0\rangle, \quad \forall k \quad (53)$$

を満たす。ただし、式 (52) における i は虚数単位である。また、式 (48) は先験確率が等確率であることを表している。

以上より、本章で示した条件のもとでは、純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対しても誤り率最小を与える測定過程となる。なお、文献 [11] の定理 3 によれば、情報源の n 次拡大により構成される長さ n の符号語全体に対し、誤り率最小の最適決定作用素は、レター状態に対する最適決定作用素による個別測定となる。したがって、3.4 と 4.3 で示した混合状態信号をレター状態とし、そこから構成される長さ n の符号語全体に対しても、純粋状態に対する最適決定作用素を適用することができる。

5. 議 論

5.1 純粋状態信号に対する量子最適決定作用素の混合状態信号に対する適用範囲

これまでの議論で、純粋状態信号の最適決定作用素

が混合状態信号に対しても最適となる場合が、かなりあることがわかった。しかし、一般にはこの命題は成り立たない。本章では、このことを例示し、命題の成立する範囲について考察する。3. で 2 次元系においては、多くの場合命題が成立したので、ここでは 3 次元系について考える。その場合、最も簡単なケースは 2 元混合状態信号であるが、それは以下のように表される。

$$\hat{\rho}_0 = f_0 |\lambda_0\rangle \langle \lambda_0| + f_1 |\lambda_1\rangle \langle \lambda_1| + f_2 |\lambda_2\rangle \langle \lambda_2| \quad (54)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^\dagger \quad (55)$$

これに対して、3. の定義により、純粋状態信号は以下のように表される。

$$\hat{\rho}_0^{(\text{pure})} = |\lambda_0\rangle \langle \lambda_0| \quad (56)$$

$$\hat{\rho}_1^{(\text{pure})} = \hat{U} \hat{\rho}_0^{(\text{pure})} \hat{U}^\dagger \quad (57)$$

ただし、式 (55)、(57) において \hat{U} は 3 次元空間上の回転を表す。ここでは、 \hat{U} が以下のように 2 次元の回転に分解される場合を考える。

$$\hat{U} = \hat{V}_0 \hat{V}_1 \hat{V}_2 \quad (58)$$

$$\hat{V}_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\hat{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (61)$$

これらの式で表される信号系において、混合状態信号に対して純粋状態の最適決定作用素と混合状態の最適決定作用素のそれぞれを作用させた場合の誤り率の比較を行った (図 4)。図 4 は、信号の直交度に対応する規格化内積

$$\frac{\text{Tr} \hat{\rho}_0 \hat{\rho}_1}{\sqrt{\text{Tr} \hat{\rho}_0^2 \text{Tr} \hat{\rho}_1^2}} \quad (62)$$

に対する誤り率特性である。

この図において、 \hat{U} の回転角 $\{\theta_n | n = 0, 1, 2\}$ は $0 \leq \theta_n \leq \pi/2$ の範囲で、刻み幅は $\pi/12$ として誤り率を調べた。また、混合状態信号に対する最適決定作用

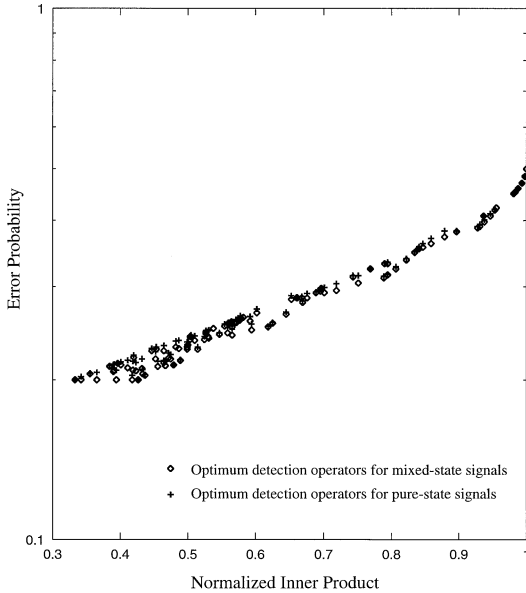


図4 混合状態と純粋状態それぞれの最適決定作用素による誤り率の比較 ($f_1 = 0.2, f_2 = 0.1$)

Fig. 4 The error probabilities of mixed-state signals with the optimum detection operators for pure-state signals (+) and mixed-state signals (o) in the case that $f_1 = 0.2$ and $f_2 = 0.1$.

素は数値的に導出した。図4より、純粋状態信号に対する最適決定作用素は混合状態信号に対して、最適な場合の誤り率にかなり近い誤り率を与えるが、厳密には最適とはならないことがわかる。したがって、3次元系の2元信号という単純な場合でも、純粋状態信号の最適決定作用素が混合状態信号に適用できないことがわかる。

しかし、最小誤り率を達成している場合がごくまれに存在する。そのような場合を詳しく調べた結果、 \hat{U} の構造に特徴があることがわかった。すなわち、 \hat{U} を式(58)~(61)のように3次元空間の三つの基底ベクトルを軸とした三つの回転の合成として表したとき、そのうちの二つの回転の回転角が0または $\pi/2$ となっていた。このような場合、空間の次元は3次元でも、二つの信号が実質2次元部分空間でしか違いがないと考えられ、純粋状態信号の最適決定作用素が適用できたと考えられる。

以上より、純粋状態信号の最適決定作用素を混合状態信号に適用できるのは、2次元系か、あるいは信号の構造が本質的には2次元に帰着する場合(上記の場

合)または、信号数と空間の次元が等しく、混合状態信号を構成する純粋状態の主要でないものの混合割合が一樣という意味での対称性をもつ場合(3.4, 4.3の場合)であると考えられる。

5.2 最適決定作用素の定義域

3.4と4.3で示した例では、一般には混合状態信号に対するヒルベルト空間の次元と純粋状態信号に対するヒルベルト空間の次元が異なる。純粋状態信号に対してはたかだか M' 次元(これを M' 次元とする)となるが、混合状態信号に対しては、 $M+1$ 次元以上となることがある。この場合、純粋状態信号に対する最適決定作用素は M' 次元空間上に作用し、 M' 次元空間での単位分解となるため、正確には混合状態信号に作用させることはできず、 M' 次元部分空間上で定義されるものとなる。しかし、3.と4.の議論から、本論文で示した例においては、 M' 次元部分空間の外での決定作用素の作用は、最適性に対して影響しない。したがって、 d 次元空間上で最適決定作用素を定義するため、純粋状態信号に対する最適決定作用素を拡張し、 M' 次元部分空間の直交補空間に対する作用を式(7)、(8)の条件を満足するように任意に定義してやればよい。例えば、多くの場合、最適決定作用素は純粋状態信号に対するSquare-root measurementとなるので、文献[19]に示されているように、 d 次元空間上で定義される混合状態信号に対するSquare-root measurementについて、式(10)の状態に対しては $f_0 \rightarrow 1$ 、式(32)の状態に対しては $P_0^{(0)} \rightarrow 1$ の極限をとればよい。しかし、実際のデバイスと対応させる実現化[25]~[31]を行う場合は、一般には更に物理系を表すヒルベルト空間(光系では無限次元)上で作用するように決定作用素を拡張しなければならない。したがって、 M' 次元空間の外での決定作用素の作用は、実現化の際に実現が容易となるように選ばれるべきである。

6. むすび

純粋状態信号と混合状態信号のそれぞれに対する最適決定作用素の関係を調べ、「純粋状態信号に対する最適決定作用素が混合状態信号に対しても最適である」という命題の適用性について考察した。その結果、信号の混合度が等しく、先験確率が等確率な場合、2次元系について命題は成立し、送信エラー等によって信号と直交する状態が伝送されるときも成立することがわかった。また、PSK信号、直交信号、線形符号な

ど、信号が群共变的であれば、送信エラー等によって他の信号や信号を生成するユニタリ作用素と可換な状態が伝送される場合、命題が成立することが明らかとなった。このことは、多くの信号のクラスが共通の決定作用素を最適とし、古典雑音の量が変動しても同じ最適受信機を利用すればよいという意味で、量子通信システムを安定的に運用してよいことがわかった。これは、対称な古典信号に対して信号の決定のためのしきい値を異なる信号間の中心に設定すれば、ガウス雑音などの量が変動しても最適受信特性を得られるという古典論に類似の結果である。また、本論文で示した例のほとんどは、純粋状態信号に対する最適決定作用素は Square-root measurement であるため、これまで信号個々に導出されていた混合状態信号の最適決定作用素を、これらの例においては、信号からシステムティックに導出できることになった。

今後は、純粋状態信号の最適決定作用素が適用できない場合の混合状態の最適決定作用素の構造を分析し、更に、最適決定作用素と実際のデバイスとの対応 [25] ~ [31] を明らかにする。

文 献

- [1] C.W. Helstrom, Quantum Detection and Estimation Theory, Academic Press, N.Y., 1976.
- [2] 広田 修, 光通信理論, 森北出版, 東京, 1985.
- [3] A.S. Holevo, "Statistical decision theory for quantum systems," J. Multivar. Anal., vol.3, pp.337-394, 1973.
- [4] A.S. Kholevo, "Some estimates for information quantity transmitted by quantum communication channels," Probl. Peredachi Inform., vol.9, no.3, pp.3-11, 1973.
- [5] H.P. Yuen, K.S. Kennedy, and M. Lax, "Optimum testing of multiple hypotheses in quantum detection theory," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-21, no.2, pp.125-134, March 1975.
- [6] A.S. Kholevo, "Capacity of a quantum communication channel," (Russian), Probl. Peredachi Inform., vol.15, no.4, pp.3-11, Oct.-Dec. 1979.
- [7] C.W. Helstrom, "Detection theory and quantum mechanics (II)," Inf. Control, vol.13, pp.156-171, Aug. 1968.
- [8] M. Osaki, M. Ban, and O. Hirota, "Derivation and physical interpretation of the optimum detection operators for coherent-state signals," Phys. Rev., vol.A54, no.2, pp.1691-1701, Aug. 1996.
- [9] M. Ban, M. Osaki, and O. Hirota, "Optimizations of quantum measurement processes for signal detection and information transmission in quantum systems," Journal of Modern Optics, vol.43, no.11, pp.2337-2354, April 1996.
- [10] M. Ban, K. Kurokawa, R. Momose, and O. Hirota, "Optimum measurements for discrimination among symmetric quantum states and parameter estimation," Int. J. Theor. Phys., vol.36, no.6, pp.1269-1288, 1997.
- [11] M. Sasaki, K. Kato, M. Izutsu, and O. Hirota, "Quantum channels showing superadditivity in classical capacity," Phys. Rev., vol.A58, no.1, pp.146-158, July 1998.
- [12] T.S. Usuda, I. Takumi, M. Hata, and O. Hirota, "Minimum error detection of classical linear code sending through a quantum channel," Phys. Lett., vol.A256, pp.104-108, May 1999.
- [13] M. Sasaki, S.M. Barnett, R. Jozsa, M. Osaki, O. Hirota, "Accessible information and optimal strategies for real symmetrical quantum sources," Phys. Rev., vol.A59, no.5, pp.3325-3335, May 1999.
- [14] V.P. Belavkin, "Optimum distinction of nonorthogonal quantum signals," Radio Eng. Electron. Phys., vol.20, pp.39-47, June 1975.
- [15] P. Hausladen and W.K. Wootters, "A 'pretty good' measurement for distinguishing quantum states," J. Mod. Opt., vol.41, no.12, pp.2385-2390, Dec. 1994.
- [16] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W.K. Wootters, "Classical information capacity of a quantum channel," Phys. Rev., vol.A54, no.3, pp.1869-1876, Sept. 1996.
- [17] M. Osaki, M. Ban, and O. Hirota, "Optimum binary signal detections for error probability and mutual informations," in Quantum Communication, Computing, and Measurement, ed. O. Hirota, A.S. Holevo, and C.M. Caves, pp.73-78, Plenum Press, New York, 1997.
- [18] 藤原祐二, 白田 毅, 内匠 逸, 畑 雅恭, "混合状態信号に対する量子最適決定作用素の導出とその実現化について" 第 21 回情報理論とその応用シンポジウム, vol.2, pp.675-678, Dec. 1998.
- [19] 大崎正雄, "2 元混合状態信号の超加法性" 第 2 回量子情報技術研究会, pp.95-100, Nov. 1999.
- [20] A. Fujiwara and H. Nagaoka, "Operational capacity and pseudoclassicality of a quantum channel," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-44, no.3, pp.1071-1086, May 1998.
- [21] 大崎正雄, "量子状態による Shannon 情報伝送" 第 1 回量子情報技術研究会資料, pp.43-48, May 1999.
- [22] H.P. Yuen, "Communication theory of quantum systems," Res. Lab. Electron., MIT, Tech. Rep., no.482, Aug. 1971.
- [23] E.B. Davies, "Information and quantum measurement," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-24, no.5, pp.596-599, Sept. 1978.
- [24] T.S. Usuda and I. Takumi, "Group covariant signals in quantum information theory," in Quantum Communication, Computing and Measurement 2, ed. P. Kumar, G.M. D'Ariano, and O. Hirota, pp.37-42, Plenum Press, New York, 2000.

- [25] R.S. Kennedy, "A near-optimum receiver for the binary coherent state quantum channel," Res. Lab. Electron., MIT, Quarterly Progress Report, no.108, pp.490-491, July 1973.
- [26] S.J. Dolinar, "An optimum receiver for the binary coherent state quantum channel," Res. Lab. Electron., MIT, Quarterly Progress Report, no.111, pp.115-120, 1973.
- [27] M. Sasaki and O. Hirota, "Optimum detection scheme with a unitary control process for binary quantum-state signals," Phys. Rev., vol.A54, no.4, pp.2728-2736, Oct. 1996.
- [28] M. Sasaki and O. Hirota, "Two examples of measurement processes illustrating Helstrom's optimum decision bound," Phys. Lett., vol.A210, pp.21-25, Jan. 1996.
- [29] M. Sasaki and O. Hirota, "Construction of an optimum detection process for binary pure-state signals," Phys. Lett., vol.A224, pp.213-219, Jan. 1997.
- [30] M. Sasaki, R. Momose, and O. Hirota, "Quantum detection for on-off keyed mixed-state signals with a small amount of thermal noise," Phys. Rev., vol.A55, no.4, pp.3222-3225, April 1997.
- [31] R. Momose, M. Sasaki, and O. Hirota, "Physical Interpretation of optimum quantum detection operators," in Quantum Communication, Computing, and Measurement, ed. O. Hirota, A.S. Holevo, and C.M. Caves, pp.289-297, Plenum Press, New York, 1997.
(平成 11 年 9 月 1 日受付, 12 年 3 月 29 日再受付)



内匠 逸 (正員)

昭 57 名工大・工・電子卒。昭 59 同大大学院修士課程了。昭 60 同大助手。現在、同大知能情報システム学科助教授。デジタル通信、適応信号処理の研究に従事。工博。電気学会、計測自動制御学会各会員。



畑 雅恭 (正員)

昭 33 名工大・工・電気卒。同年沖電気入社。以来デジタル通信方式、電子回路応用、ミリ波通信機の研究開発に従事。昭 60 名工大教授。平 10 より愛知県立大・情報科学教授。デジタル信号処理、情報通信の研究に従事。工博(東工大)。



藤原 祐二

平 11 名工大・工・知能情報システム卒。同大大学院修士課程在学中。量子情報理論の研究に従事。



白田 毅 (正員)

平 2 玉川大・工・情報通信卒。平 7 同大大学院博士課程了。同年名工大・工・知能情報システム学科助手。量子情報理論とその応用に関する研究に従事。博士(工学)。応用物理学会会員。