論　文

ニューロンモデルに存在する双対性を利用したニューラルネットワークのための教師あり学習手法

山田　樹一[†]　黒柳　奨[†]　岩田　彰[†]

A Supervised Learning Method Using Duality in the Artificial Neuron Model

Kiichi YAMADA[†], Susumu KUROYANAGI[†], and Akira IWATA[†]

あらまし　階層型のニューラルネットワークにおいて，外部から見えない隠れ層に対し教師あり学習を行う方法として一般的に誤差逆伝搬法が用いられている．しかし，この方法を適用するためにはニューロンモデルの出力関数が微分可能でなければならない．本論文では隠れ層ニューロンに対して教師あり学習を行うための方法として，出力層ニューロンに存在する結合重みの学習則と双対性を利用して隠れ層ニューロンに対する教師信号を計算する手法を提案する．この手法はニューロンモデルに双対性が存在すれば適用できるため，出力層，隠れ層ニューロンが微分可能である必要はない．誤差逆伝搬法が適用できない場合の例として出力関数がステップ関数であるニューロンで構成されるパーセプトロンに対して本手法を適用し，ネットワーク全体に対する学習則を得ることができた．また実際に XOR 問題を学習させたところ，シグモイド関数を出力関数とするニューロンで構成されるパーセプトロンに対する誤差逆伝搬法と同等の学習成功率を得ることができた．

キーワード　双対性，ニューラルネットワーク，教師あり学習，パーセプトロン，XOR 問題

1. まえがき

階層型ニューラルネットワークは入力が与えられる入力層，外部へ出力する出力層とそれ以外の隠れ層に分けることができる．出力層を構成するニューロンモデルは望ましい出力を教師信号として与えることで教師あり学習を行うことができるが，隠れ層を構成するニューロンモデルに対しては望ましい出力を定義することができないため教師あり学習を行うことができない．このため階層型ニューラルネットワークの望ましい出力を得るために様々な方法が提案されてきた [2]～[4]．Minsky と Paert によって提案された階層型のパーセプトロン [2] はクラス識別問題において線形分離しか行えなかった Rosenblatt の単層のパーセプトロン [1] に隠れ層を追加することで，非線形分離を行うことができるようにした 3 層階層型のネットワークである．3 層階層型のパーセプトロンで非線形分離を行うためには隠れ層出力が線形分離可能でなければならないが，隠れ層ニューロンに対する望ましい出力を与えられないため，パーセプトロンでは隠れ層ニューロンの学習を行わず，隠れ層ニューロンの結合重みをランダムに決めることで隠れ層出力が線形分離可能となることを期待している．しかし，実際に隠れ層出力が線形分離可能となるには非常に多くの隠れ層ニューロンが必要となるという問題がある．パーセプトロンにおいて隠れ層の結合重みが修正できないという問題を解決する方法として Rumelhart らによって誤差逆伝搬法 [3] が提案された．誤差逆伝搬法は最急降下法を利用した学習則で，出力層で定義される誤差を結合重みに関して偏微分することで結合重みの変更方向を得るものである．これにより明示的に教師信号が与えられない隠れ層に対しても教師あり学習を行うことができるが，最急降下法を用いているため，隠れ層，出力層の各ニューロンの出力関数が微分可である必要があるという制約がある．

また隠れ層に対しては教師あり学習ではなく教師なし学習を行うという方法が考えられる．Hecht-Nielsen によって提案されたカウンタープロパゲーション [4] はこのような学習則の一つで，隠れ層は教師なし学習である Kohonen の競合学習 [5]，出力層は教師あり学習

[†] 名古屋工業大学電気情報工学科，名古屋市
Dept. of Electrical and Computer Eng., Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya-shi, 466–8555 Japan

を行う．しかし隠れ層に対して教師なし学習を行った場合，隠れ層ニューロンに生成される結合重みの値は教師なし学習の性質を反映したものであり，それが出力層の学習則にとって望ましいものとなる保証がない．

本論文では隠れ層ニューロンに対して教師あり学習を行うための方法として，ニューロンモデルに存在する双対性 (duality) と出力層ニューロンに対する教師あり学習則を利用して隠れ層ニューロンに対する望ましい出力を計算する手法を提案する．隠れ層ニューロンに対する望ましい出力が得られれば，それを教師信号として隠れ層ニューロンに対して教師あり学習を行うことができる．提案した手法は出力層のニューロンモデルに双対性と結合重みの学習アルゴリズムが存在すれば適用できるため，隠れ層，出力層のニューロンが微分可能である必要はない．また，隠れ層ニューロンに対する教師信号は出力層における学習則によって求められるため，これを教師信号として学習を行う隠れ層ニューロンの結合重みは，出力層の学習則にとって望ましいものとなる．本論文では例としてステップ関数を出力関数とする微分不可である多層パーセプトロンに本手法を適用することで，隠れ層ニューロンに対する教師信号を求め，それにより隠れ層ニューロンに対する教師あり学習が行えることを示す．また XOR 問題を例にとり，シグモイド関数を出力関数とする多層パーセプトロンに対して Rumelhart らの誤差逆伝搬法を適用した場合と同等の学習成功率を得られることを示す．

2. 双対性を利用した学習手法

本章では双対性を利用して教師信号を計算する方法を説明する．まず望ましい結合重みを求めるアルゴリズムから双対性を利用することで望ましい入力が求められることを導き，また望ましい入力が前段ニューロンに対する教師信号として扱えることを示す．最後に階層型ニューラルネットワークにこの手法を適用し，隠れ層ニューロンに対する教師あり学習が可能であることを示す．

2.1 ニューロンモデルの双対性

本論文で想定するニューロンモデルの出力を (1) に示す．

$$o = f\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta\right) \tag{1}$$

ここで $\mathbf{w}$ は結合重みベクトル，$\mathbf{i}$ はニューロンモデルへの入力ベクトル，Θ はニューロンモデルにおける結合重み以外のパラメータであり，$f\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)$ は出力関数である．また本論文では，あるニューロンモデルに対して結合重みベクトルと入力ベクトルの値を入れ換えたニューロンモデルをそのニューロンモデルに対する双対ニューロンモデルと呼ぶ．(1) のニューロンモデルに対する双対ニューロンモデルの出力を (2) に示す．

$$o = f\left(\mathbf{i}, \mathbf{w}, \Theta\right) \tag{2}$$

今，あるニューロンモデルとその双対ニューロンモデルの出力が次式

$$o = f\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta\right) = f\left(\mathbf{i}, \mathbf{w}, \Theta\right) \tag{3}$$

のように等しくなるとき，本論文ではこのニューロンモデルには双対性が存在するという．(3) が成り立つニューロンモデルとしては，出力が (4) のように結合重みベクトルと入力ベクトルの内積で決まるニューロンモデルや，(5) でのように結合重みベクトルと入力ベクトルの距離で決まるニューロンモデルがある．

$$o = f\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta\right) = f'\left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{i}, \Theta\right) \tag{4}$$

$$o = f\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta\right) = f''\left(\|\mathbf{w} - \mathbf{i}\|, \Theta\right) \tag{5}$$

2.2 望ましい結合重みの計算

ニューロンモデルにおける学習とは，ある目的を達成するための望ましいパラメータを求めることと定義することができる．今ニューロンモデルに対する学習則が存在し，パラメータの一つである結合重みベクトルを学習によって更新することを考え更新後の結合重みベクトルを $\mathbf{w}^{new}$ とする．学習則が教師なし学習の場合，結合重みベクトルの更新式は (6) のように表すことができる．

$$\mathbf{w}^{new} = g\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta\right) \tag{6}$$

また教師あり学習の場合，外部から与えられる教師信号を T とすると，この教師信号 T も結合重みベクトルの更新に影響するため，教師あり学習における結合重みベクトルの更新式は次式のようになる．

$$\mathbf{w}^{new} = g\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta, T\right) \tag{7}$$

(6)，(7) をまとめるために $\Theta' = (\Theta, T)$ とおくと（教師なし学習の場合 $\Theta' = \Theta$）ある学習則による結合重みベクトルの更新は次式のように一般化される．

$$\mathbf{w}^{new} = g\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta'\right) \tag{8}$$

結合重みベクトルの変化に伴ってニューロンモデルの

出力は (9) のように変化する．

$$\mathbf{w} \to \mathbf{w}^{new}$$
$$f(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta) \to f(\mathbf{w}^{new}, \mathbf{i}, \Theta) \tag{9}$$

ある学習則に基づいて結合重みの更新を行ったとき最急降下法のアルゴリズムのローカルミニマムの問題のように，目標関数を最小化するパラメータを求める，という本来の目的からすれば最適ではないパラメータが得られる場合がある．しかしこれは学習則に基づく結合重みの更新によって得られるものであるので，本研究ではこのような最適でないパラメータが得られる場合も含めて，学習則によって得られた結合重みをその学習則の目的にとっての "望ましい結合重み"，結合重みの更新によって変化した出力を "望ましい出力" と呼ぶことにする．

これより，(9) による出力の変化は学習則の目的にとって望ましいものであり，またこの変化をもたらした結合重みベクトル $\mathbf{w}^{new}$ は学習則の目的にとって望ましい結合重みベクトルである．

2.3 望ましい入力の計算

双対ニューロンモデルに対して **2.2** で示した学習によって結合重みベクトルを更新することを考える．更新後の結合重みベクトルを $\mathbf{i}^{new}$ とすると，結合重みベクトルの更新は (8) より次のように表される．

$$\mathbf{i}^{new} = g\left(\mathbf{i}, \mathbf{w}, \Theta'\right) \tag{10}$$

この結合重みベクトルの変化に伴いニューロンモデルの出力は次式のように変化する．

$$\mathbf{i} \to \mathbf{i}^{new}$$
$$f(\mathbf{i}, \mathbf{w}, \Theta) \to f(\mathbf{i}^{new}, \mathbf{w}, \Theta) \tag{11}$$

(9) と同じように (11) に示す出力の変化も学習則の目的にとって望ましいものである．

今，このニューロンモデルに双対性が存在するならば，(3) が成り立ち，(11) は次式のように書き換えることができる．

$$\mathbf{i} \to \mathbf{i}^{new}$$
$$f(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta) \to f(\mathbf{w}, \mathbf{i}^{new}, \Theta) \tag{12}$$

この式はもとのニューロンモデルにおいて入力ベクトルの値が $\mathbf{i}$ から $\mathbf{i}^{new}$ へ変化するときニューロンモデルの出力が $f(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta)$ から $f(\mathbf{w}, \mathbf{i}^{new}, \Theta)$ へと変わることを意味している．この出力の値の変化は学習則の目的にとって望ましいものであるため，この変化をもたらす入力ベクトル $\mathbf{i}^{new}$ はこの学習則にとって望ましいものであるといえる．

以上をまとめると，双対性のあるニューロンモデルに対してある学習則に基づく関数 $g(\cdot,\cdot,\cdot)$ によって望ましい結合重みが求められるとき（(8)），関数 $g(\cdot,\cdot,\cdot)$ の引数の結合重みベクトルと入力ベクトルを入れ換えることで望ましい入力を求めることができる（(10)）．

双対性のあるニューロンモデルにおいて，その他のパラメータ Θ も学習を行う場合も含めた学習と望ましい入力の計算の流れを示す．

（1） 結合重み，入力，その他のパラメータの望ましい値 $\mathbf{w}^{new}$，$\mathbf{i}^{new}$，Θ^{new} の計算

$$\mathbf{w}^{new} = g\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta'\right)$$
$$\mathbf{i}^{new} = g\left(\mathbf{i}, \mathbf{w}, \Theta'\right)$$
$$\Theta^{new} = h\left(\mathbf{w}, \mathbf{i}, \Theta'\right)$$

（2） 結合重みとその他のパラメータの更新

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{new}$$
$$\Theta = \Theta^{new}$$

2.4 前段ニューロンに対する教師信号の計算

ニューロンに対する教師信号の計算方法を，図 1 に示すように一つのニューロンのみと接続されている場合と図 2 に示すように複数のニューロンに接続されている場合に分けて説明する．ここでは信号を送るニューロンを前段ニューロン (Pre-neuron)，信号を受けるニューロンを後段ニューロン (Post-neuron) と呼ぶ．

2.4.1 後段ニューロンが一つの場合

図 1 のように前段ニューロン A の出力が後段ニューロン B に入力されている場合，後段ニューロン B に双対性が存在するならば，(10) により望ましい入力を計算することができる．後段ニューロン B における望ましい入力 T_{AB} とは前段ニューロン A に対する望ましい出力であるため，次式のように前段ニューロン A に対する教師信号 T_A を求める．

$$T_A = T_{AB} \tag{13}$$

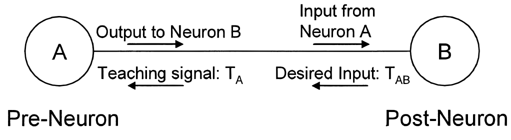

図 1 教師信号の計算（1 対）
Fig. 1 Calculate teaching signal (one to one).

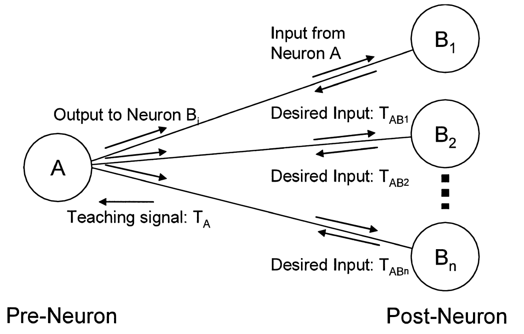

図 2　教師信号の計算
Fig. 2　Calculate teaching signal.

2. 4. 2　後段ニューロンが複数の場合

図 2 のようにニューロン A の出力が複数のニューロン B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に接続されている場合，後段ニューロンそれぞれにおいて計算される望ましい入力 T_{AB_i} は異なる値をとる．この場合，前段ニューロン A に対する教師信号をニューロン A の出力（o_A とする）とニューロン A に対する誤差信号の和と考える．ある後段ニューロン B_i における望ましい入力を T_{AB_i} とするとき前段ニューロン A への誤差信号 E_A を (14) に示すように各後段ニューロン B_i における誤差信号 $T_{AB_i} - o_A$ の総和とする．このときニューロン A に対する教師信号 T_A は (15) に示すようにこの誤差信号に出力を足したものになる．

$$E_A = \sum_{i=1}^{n} (T_{AB_i} - o_A) \tag{14}$$

$$T_A = o_A + E_A \tag{15}$$

階層型ニューラルネットワークの学習において，隠れ層に対する教師信号を上記の誤差の総和をとる方法で求めた場合，誤差逆伝搬法と等価な学習が可能であることを **4.** で示す．

2. 5　階層型ニューラルネットワークの学習

双対性を利用して図 3 の多層階層型ニューラルネットワークに対して学習を行う方法を説明する．

まず出力層のニューロンは何らかの学習則によって結合重みの学習を行う．そして出力層ニューロンに双対性があることを利用して N 番目の隠れ層のニューロンに対する教師信号を計算する．N 番目の隠れ層のニューロンはこの教師信号をもとにして何らかの教師あり学習則に基づいて結合重みの学習を行う．更に N 番目の隠れ層のニューロンに存在する双対性を利用して $N-1$ 番目の隠れ層のニューロンに対する教師信号を計算する．このように i 番目の隠れ層ニューロンは $i+1$ 番目の隠れ層のニューロンから教師信号を受け取り，何らかの教師あり学習を行い $i-1$ 番目の隠れ層のニューロンに対する教師信号を計算する．隠れ層ニューロンに対して教師なし学習をした場合，隠れ層ニューロンに得られる結合重みは後段の層のニューロンにとって望ましいものである保証はないが，この方法では双対性を利用して計算される教師信号は後段ニューロンに対する学習則に基づいているため，これをもとに学習する前段ニューロンの結合重みは後段ニューロンの学習則にとって望ましいものであるはずである．また，この方法を適用するための条件は出力層と 2 番目から N 番目までの隠れ層ニューロンに双対性が存在することと，出力層ニューロンに対する学習則と隠れ層ニューロンに対する教師あり学習則が存在することであるが，**2.** で例に挙げたように一般によく用いられるニューロンモデルは出力を内積や距離を用いて計算するため，これらには双対性が存在する．このため多くの場合において本手法を適用することができると考えられる．

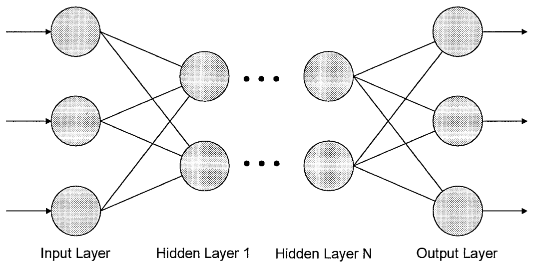

図 3　多層階層型ニューラルネットワーク
Fig. 3　Multi layered neural network.

3.　パーセプトロン

3. 1　単層パーセプトロン

パーセプトロンとは学習を行うパターン識別機械で，階層型のネットワーク構造をもつ [1], [2], [6]．パーセプトロンにおける出力層のニューロンは 0 か 1 の 2 値の値をとるため，出力層ニューロンは出力が 0 となるパターンと出力が 1 となるパターンを識別しているということができる．単層パーセプトロン [1] とはパーセプトロンの中で隠れ層がない階層型のネットワーク構造をもつものである．単層パーセプトロンは入力層と出力層からなり，出力層のニューロンは出力が (16)

で示される MuCulloch・Pitts タイプのニューロンモデルにより構成される．

$$o = f\left(\sum_{i=0}^{N} w_i i_i\right) \tag{16}$$

ここで $f(\cdot)$ はステップ関数である．

単層パーセプトロンに対する学習はデルタルールで行う [7]．デルタルールは出力の値を教師信号の値に近づけるような学習を行う教師あり学習則の一つで，教師信号を t，学習前の結合重みを w_i^{old}，学習後の結合重みを w_i^{new} とすると次式で表される．

$$w_i^{new} = w_i^{old} + \alpha\,(t - o)\,i_i \tag{17}$$

ここで α は学習係数で十分小さな正の定数である．デルタルールによる結合重みの更新は，入力パターンに対して教師信号の値と実際の出力の値が異なる場合は結合重みを更新し，等しい場合は更新しない．学習はすべての入力パターンに対して結合重みの更新が行われなくなるまで行う．学習が終了したとき，すべての入力パターンに対してクラスを正しく識別する結合重みが得られている．単層パーセプトロンの学習は二つのクラスに属するパターンが線形分離可能であるならば有限回で終了することが証明されている [8]．逆に二つのクラスに属するパターンが線形分離可能でない場合は学習は終了しない．つまり単層パーセプトロンは線形分離不可能なパターンを識別することはできない．

3.2 階層型パーセプトロン

単層パーセプトロンは線形分離可能な問題を解くことしかできなかった．そこで単層パーセプトロンに隠れ層を追加した 3 層階層型パーセプトロンを考える [2]．3 層階層型パーセプトロンにおける隠れ層，出力層は単層パーセプトロンと同様に MuCulloch・Pitts タイプのニューロンモデルによって構成されており，その出力は (16) で求められる．

単層パーセプトロンは線形分離可能な問題しか解くことができなかったが，隠れ層によって入力層では線形分離不可能なパターンであったものを線形分離可能なパターンへと変換することができれば，3 層階層型ネットワークは線形分離不可能なパターンを識別することができる．しかし隠れ層ニューロンに対しては，どのような出力をした場合に入力パターンの集合が線形分離可能となるかが分からないため，望ましい出力をニューロンに与えることができない．この理由から初期の 3 層階層型パーセプトロンでは隠れ層ニューロンは学習を行わず，出力層のみ，単層パーセプトロンの場合と同様にデルタルールで学習を行う [2]．隠れ層ニューロンの学習が行えない場合，隠れ層ニューロンの出力が線形分離可能なパターンとなる保証はないが，結合重みの値をランダムに決めた隠れ層ニューロンを多数用意することで，結果的に隠れ層出力が線形分離可能となる可能性が増すと考えられる．しかし，多数のニューロンが必要であるという点で実用的でない．

3.3 誤差逆伝搬法

階層型パーセプトロンでは望ましい出力が与えられないという理由から隠れ層に対する学習が行えなかった．また学習を行わない場合は非常に多くの隠れ層ニューロンを用意しなければならないため，実用的ではない．この問題に対して Rumelhart らは，各ニューロンの出力関数を微分可能なものとすることによって最急降下法を適用して学習を行う誤差逆伝搬法を提案した [3]．誤差逆伝搬法で用いるニューロンモデルの出力は (16) における $f(\cdot)$ を (18) で示されるシグモイド関数に置き換えた式で求める．

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \tag{18}$$

本論文では出力関数がシグモイド関数であるニューロンモデルで構成されるパーセプトロンをアナログパーセプトロンと呼び，これに対し，出力関数がステップ関数であるものをディジタルパーセプトロンと呼ぶことにする．図 4 に 3 層のアナログパーセプトロンを示す．このアナログパーセプトロンに対して最急降下法を適用し，パラメータ w_{ji}^H，w_{kj}^O を更新する．ここで，I_i，H_j，O_k は入力層，隠れ層，出力層ニューロンのそれぞれ i 番目，j 番目，k 番目の出力，w_{ji}^H，w_{kj}^O はそれぞれ隠れ層ニューロン j の i 番目の結合重み，出力層ニューロン k の j 番目の結合重み，T_k^O は出力

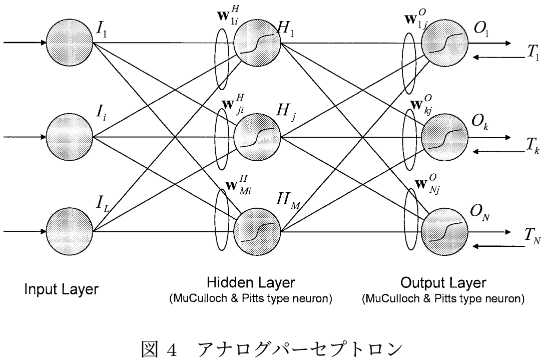

図 4　アナログパーセプトロン
Fig. 4　Analog perceptron.

層ニューロン k に対する教師信号，L，M，N はそれぞれ入力層ニューロン，隠れ層ニューロン，出力層ニューロンの個数である．今最急降下法を用いて極小化したい値を誤差 E とし，以下のように定義する．

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(T_k^O - O_k\right)^2 \tag{19}$$

これは望ましい出力である教師信号と実際の出力の値から定義される自乗誤差の総和である．これより，出力層，隠れ層の結合重みの変更量 Δw_{kj}^O，Δw_{ji}^H はそれぞれ

$$\begin{aligned}\Delta w_{kj}^O &= -\alpha\frac{\partial E}{\partial w_{kj}^O}\\ &= \alpha(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)H_j \end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Delta w_{ji}^H &= -\alpha\frac{\partial E}{\partial w_{ji}^H}\\ &= \alpha\sum_{k=1}^{N}\left(w_{kj}^O(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)\right)\\ &\qquad \cdot H_j(1-H_j)I_i \end{aligned}\tag{21}$$

となる．以上で示したように，誤差逆伝搬法は隠れ層ニューロンに対する教師あり学習を行うことができる方法であるが，誤差逆伝搬法を適用するためには，出力層，隠れ層ニューロンの出力関数がともに微分可能でなければならない．このため，微分不可能な出力関数をもつニューロンモデルによって構成されているネットワークや競合動作を行うネットワークには適用することができない，という問題がある．

4. 双対性を利用したアナログパーセプトロンの学習

双対性を用いた学習手法を図 4 のアナログパーセプトロンに適用し，学習を行う．アナログパーセプトロンを構成するニューロンモデルの出力は結合重みベクトルと入力ベクトルの内積によって求められるため，このニューロンモデルには双対性が存在する．

出力層ニューロン k の結合重み j の変更量 Δw_{kj}^O を求めるアルゴリズムとして最急降下法を用いる．これは (20) と同じになる．

$$\Delta w_{kj}^O = \alpha^O(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)H_j \tag{22}$$

これより，出力層における望ましい結合重み $\mathbf{w}_{kj}^{O\ new}$ は次式のようになる．

$$w_{kj}^{O\ new} = w_{kj}^{O\ old} + \alpha^O(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)H_j \tag{23}$$

(23) に対して双対性を利用した学習手法を適用し，結合重み $w_{kj}^{O\ old}$ と入力 H_j を入れ換え，出力層ニューロンに対する望ましい入力 $T_{kj}{}^H$ を求める．

$$T_{kj}^H = H_j + \alpha^O(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)w_{kj}^{O\ old} \tag{24}$$

次に隠れ層ニューロンに対する誤差の変更量を計算する．教師信号を求める方法として，誤差の総和をとる方法を選ぶと，隠れ層ニューロン j に対する誤差 E_j^H，教師信号 T_j^H は次式のようになる．

$$\begin{aligned}E_j^H &= \sum_{k=1}^{N}\left(T_{kj}^H - H_j\right)\\ &= \alpha^O\sum_{k=1}^{N}\left((T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)w_{kj}^{O\ old}\right)\\ T_j^H &= H_j + E_j^H \end{aligned}\tag{25}$$

この教師信号をもとに隠れ層ニューロンは出力層と同様に最急降下法で学習を行う．隠れ層ニューロン j の結合重み i の変更量 Δw_{ji}^H は次式のようになる．

$$\begin{aligned}\Delta w_{ji}^H &= \alpha^H(T_j^H - H_j)H_j(1-H_j)I_i\\ &= \alpha^H\alpha^O\sum_{k=1}^{N}(T_k^O - O_k)O_k(1-O_k)w_{kj}^{O\ old}\\ &\qquad \cdot H_j(1-H_j)I_i \end{aligned}\tag{26}$$

(26) において $\alpha^H = 1$ とした場合，これは誤差逆伝搬法を用いて計算した (21) と等しくなる．

以上より，アナログパーセプトロンに対して誤差逆伝搬法を適用した場合と，本手法を適用して教師信号を誤差信号の総和をとる方法で求めた場合は，結合重みの更新式は等しくなり，また学習の収束性や最適性も誤差逆伝搬法を適用した場合と等価である．

5. 双対性を利用したディジタルパーセプトロンの学習

前章ではアナログパーセプトロンに対して双対性を適用し，最急降下法のアルゴリズムをもとにして学習則を導き，それが誤差逆伝搬法によって導かれるものと同じであることを示した．本章では双対性を利用して，ディジタルパーセプトロンに対する学習則を導く．また，導かれた学習則の動作を XOR 問題の学習により確認する．

5.1 双対性を利用した学習則

ディジタルパーセプトロンを構成するニューロンモデルの出力関数はステップ関数であり，微分不可能なため，学習則として (17) で示されるデルタルールを適用する．これより出力層ニューロン k の結合重み j の望ましい値 $w_{kj}^{O\,new}$ は次式のようになる．

$$w_{kj}^{O\,new} = w_{kj}^{O} + \alpha^{O}(T_k^O - O_k)H_j \tag{27}$$

また同時に，双対性を利用して上式の結合重み w_{kj}^{O} と入力 H_j を入れ換え，望ましい入力 T_{kj}^{H} を求める．

$$T_{kj}^{H} = H_j + \alpha^{O}(T_k^O - O_k)w_{kj}^{O} \tag{28}$$

次に隠れ層ニューロンに対する教師信号を求める．教師信号を求める方法として，誤差の総和をとる方法を選ぶと，隠れ層ニューロン j に対する教師信号は次式のようになる．

$$T_j^{H} = H_j + \alpha^{O}\sum_{k=1}^{N}(T_k^O - O_k)w_{kj}^{O\,old} \tag{29}$$

隠れ層ニューロンはこの教師信号をもとに，次式のようにデルタルールで結合重み w_{ji}^{H} を更新する．

$$\begin{aligned} w_{ji}^{H\,new} &= w_{ji}^{H} + \alpha^{H}(T_j^H - H_j)I_i \\ &= w_{ji}^{H} + \alpha^{H}\alpha^{O}\sum_{k=1}^{N}(T_k^O - O_k)w_{kj}^{O\,old} \end{aligned} \tag{30}$$

また，各層のニューロンのしきい値 θ_k^O，θ_j^H は次式で更新する．

$$\theta_k^{O\,new} = \theta_k^{O} - \alpha^{O}(T_k^O - O_k) \tag{31}$$

$$\theta_j^{H\,new} = \theta_j^{H} - \alpha^{H}(T_j^H - H_j) \tag{32}$$

5.2 学習シミュレーション

双対性を利用した学習則の動作を確認するため，学習シミュレーションで XOR 問題を学習する．比較対象として，アナログパーセプトロンに対する誤差逆伝搬法（以下 ABP）と，大堀らによって提案されたディジタル型 BP 法 [9]（以下 DBP 法）を用い，同様の学習を行う．DBP 法はディジタルパーセプトロンに対する教師あり学習則で，出力層ニューロンの活性値が減少・増加するという条件をもとに隠れ層ニューロンに対する教師信号を与えることによって学習を行う方法である．

ネットワーク構造は 3 層階層型で，入力層，隠れ層，出力層のニューロン数はそれぞれ 2，2，1 であり，結合重み，しきい値の初期値は隠れ層，出力層とも $[-1, 1]$ の範囲の一様乱数 100 系列で生成したものである．最大学習回数は大堀らの学習実験 [9] に合わせ，DBP 法は $10^2/\alpha$，ABP 法は $10^5/\alpha$，提案手法は DBP 法と同じとした．また ABP 法では，(19) で示される誤差が 10^{-3} 以下となった場合，学習が終了したとみなした．以上の条件で，学習係数を提案手法では $10^{-4} \sim 10^{0}$，DBP 法では $10^{-5} \sim 10^{-1}$ の範囲，ABP 法では $10^{-3} \sim 10^{2}$ の範囲で変化させ，学習成功率を調べた．提案手法の学習係数は出力層ニューロンの学習係数であり，隠れ層ニューロンの学習係数は 1 で固定である．

学習の結果，提案手法の最大学習成功率が低い値となったため，その原因を調べたところ，隠れ層ニューロンに対する教師信号の値が 0 より小さく，または 1 より大きくなっている場合があることが分かった．出力の値は 0，1 の 2 値をとるので，学習によって 0 より小さい，または 1 より大きい出力の取り得る値は存在しない．このため教師信号の値を次式のように $[0, 1]$ の範囲に制限し，制限した値 $T_j^{H\,cliped}$ を新たな教師信号の値として学習を行った．

$$T_j^{H\,cliped} = \begin{cases} 1 & T_j^H > 1 \\ T_j^H & 0 \leqq T_j^H \leqq 1 \\ 0 & T_j^H < 0 \end{cases} \tag{33}$$

学習の結果得られた最大学習成功率とそのときの学習係数の値を表 1 に示す．表 1 より，提案手法による学習成功率はアナログパーセプトロンに対する ABP 法と同等の値をとっていることが分かる．これより，学習成功率は十分な値であると考えられるので，提案した双対性を利用した学習則により，ディジタルパーセプトロンに対する学習が可能であると考えられる．また，提案手法で教師信号の値の範囲を制限した場合に ABP 法と同等の学習成功率が得られたことから，ディジタルパーセプトロンに対するデルタルールと双対性に基づく学習では教師信号の値を $[0, 1]$ の範囲に制限

表 1 最大学習成功率
Table 1 Maximum success rate of learning.

学習手法	最大学習成功率	学習係数
提案手法	0.33	0.05
提案手法（教師信号を制限）	0.96	0.02
ABP 法	0.96	0.05
DBP 法	0.91	0.001

することが収束するための条件であると考えられる．これは，ニューロンの出力のとる範囲が $[0, 1]$ であることからも，妥当な結果であると考えられる．ディジタルパーセプトロンに対する教師あり学習則である DBP 法と提案手法を比較した場合も同等の学習成功率となっているが，提案手法はディジタルパーセプトロンに限定したものではなく，双対性の存在する階層型ニューラルネットワークに用いることができる一般的な学習手法であり，汎用性の面で有利である．

6. む す び

本論文では一般的なニューロンモデルに双対性があることを示し，双対性を利用することで後段ニューロンにおける結合重みの更新アルゴリズムに基づいて望ましい入力を求めるアルゴリズムが導けることを示した．これより接続された前段のニューロンに対する教師信号を計算することができ，前段ニューロンは教師信号をもとに教師あり学習を行うことができる．この方法によって，双対性が存在するニューロンモデルで構成される一般の階層型ネットワークに対して，従来は明示的な教師信号を与えることができなかった隠れ層のニューロンに教師信号を与えることで教師あり学習を行うことが可能になった．例としてアナログパーセプトロンに対して双対性を利用した本手法を適用した結果，誤差逆伝搬法を適用した場合に得られる結合重みの更新式と全く等価なものが得られることが分かった．また，ステップ関数を出力関数とするニューロンで構成されるディジタルパーセプトロンに対して提案手法を適用し学習を行った結果，学習成功率はアナログパーセプトロンに対する誤差逆伝搬法を適用した場合と同等な値を得ることができた．

本論文では例としてパーセプトロンにおける非線形写像を取り上げたが，本手法は双対性の存在するニューラルネットワークであれば用いることができる汎用的な学習手法であり，例えば LVQ [10] のように最急降下法では誤差の伝搬が不可能なネットワークにおいても適用が可能であると考えられる．今後は提案手法を様々なニューラルネットワークに適用することでその有効性を検証していきたい．

文　　献

[1] F. Rosenblatt, Principles of neurodynamics, Spartan, New York, 1962.

[2] M.L. Minsky and S.A. Papert, Perceptrons, MIT Press, Cambridgh, 1969.

[3] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams, “Learning internal representation by error backpropagation,” Parrallel Distributed Processing, vol.1, pp.318–362, 1986.

[4] R. Hecht-Nielsen, “Counter-propagation networks,” Appl. Opt., vol.26, pp.4979–4989, 1987.

[5] T. Kohonen, Self-organization and associative memory (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[6] 松本　元，脳とコンピュータ 2：ニューロコンピューティングの周辺，大津展之（編），培風館，1991.

[7] B. Widrow and S.D. Stearns, Adaptive signal processing, Prentice-Hall, 1985.

[8] 上坂吉則，ニューロコンピューティングの数学的基礎，近代科学社，1993.

[9] 大堀隆文，鎌田修平，小林靖宏，小西儀紀，渡辺一央，“微分不能素子をもつ階層型ニューラルネットに対する誤差逆伝搬法の提案，” 信学技報，NC99-85, Feb. 2000.

[10] T. Kohonen, Self-organizing maps, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

（平成 15 年 1 月 31 日受付，5 月 25 日再受付）

山田　樹一

平 13 名工大・電気情報卒，平 15 同大大学院博士前期課程電気情報了．

黒柳　　奨　（正員）

平 3 名工大・電気情報卒．平 5 同大大学院博士前期課程了．平 8 同大学院博士後期課程了．同年名工大・電気情報・助手，現在に至る．ニューラルネットワーク，聴覚情報処理に関する研究に従事．博士（工学）．日本音響学会，日本神経回路学会，日本エム・イー学会各会員．

岩田　　彰　（正員）

昭 48 名大・工・電気卒．昭 50 同大大学院修士課程了．同年名工大・情報・助手．昭 57 年 4 月より昭 58 年 10 月まで，ドイツ連邦共和国ギーセン大学医学部医用情報研究所客員研究員．昭 59 名工大・情報・助教授．平 5 名工大・電気情報・教授，現在に至る．ニューラルネットワーク，生体情報処理，医療情報システム，情報セキュリティ，インターネットコンテンツ開発技術に関する研究に従事．工博．平 5 年度本会論文賞受賞，平 10 年度情報処理学会 Best Author 賞受賞．情報処理学会，日本エム・イー学会，日本心電図学会，日本神経回路学会，日本医療情報学会各会員，IEEE Senior Member.