

受動歩行における平衡点の安定メカニズムの構造

池 俣 吉 人* 佐 野 明 人* 藤 本 英 雄*

A Stability Mechanism of the Fixed Point in Passive Walking

Yoshito Ikemata*, Akihito Sano* and Hideo Fujimoto*

A passive walker can walk down shallow slope with no energy source other than gravity. This motion is very attractive because its gait is really natural and ideal. Moreover, the walker can exhibit a stable limit cycle. Dynamics of passive walking is very interesting target and important for understanding human locomotion and developing the biped robots. Though the passive walkers are mechanically simple, they are a sort of hybrid systems with the switching condition which combines the nonlinear differential equations describing the swing motion and the leg-exchange. This makes it difficult to analyze. In this paper, we focus on the mechanism of stability of fixed points in passive walking. For the sake of simplicity and clarity as possible, we use a biped model known as the simplest walking model and treat the inter-leg angle at heel-strike as a variable. The equations of stability condition are derived from the eigenvalues of discrete dynamical system. We demonstrate a physical structure which forms the fixed points and a mechanism of its stability.

Key Words: Passive Walking, Limit Cycle, Fixed Point, Stability, Hybrid System

1. はじめに

受動歩行は、歩行機のもつダイナミクスと環境（ここでは、スロープ）との相互作用のみによって、理想とする自然な歩容を形成する。特に、安定したリミットサイクル（閉軌道）が存在するという重要な特徴をもつ。すなわち、ある状態から定常歩行に収束する一種の引き込み現象が見られる。

受動歩行の研究を創始した McGeer は、次の二つの成果を残しその後の研究に大きな影響を与えた [1] [2]。一つは、離散事象（脚の切換え現象）を含んだ複雑な受動歩行システムを、離散的な状態遷移に注目して、差分方程式で表した点である。もう一つは、この差分方程式を平衡点（リミットサイクルの一断面の点）近傍で線形近似して導いたヤコビ行列の固有値から平衡点の安定性を示した点である。この平衡点の安定性の解析法は、受動歩行の研究において広く用いられている。また、歩行制御の有効性を検証する場合にも利用されている [3]~[5]。

以上のことから、受動歩行の安定性解析に関する基本的なフレームワークは、1990年初頭 McGeer によってほぼ形作られていたと言える。それにもかかわらず、いまだ平衡点が安定となるメカニズムは明らかになっていない。未解明と言われる理由の一つとして、平衡点の安定性を決める条件が導かれていない点が挙げられる。もし、安定条件式が導ければ、力学的な観

点から安定性解析が可能となり、機構設計や制御系設計を含む工学的応用が期待できる。

多くの力学系において、あるエネルギー関数の最小点あるいは極小点が平衡状態（Equilibrium state）となる。受動歩行では、平衡点（Fixed point）では重力ポテンシャルからの供給エネルギーと損失エネルギーがバランスした状態になると言われているが [6] [7] [9]、平衡点自身は数値的に探索されるにとどまり、直接その安定性が議論される傾向にあった [1]~[10]。

前述のように、ヤコビ行列の固有値から平衡点の安定性が決まる。つまり、平衡点が安定となるメカニズムを明らかにするには、ヤコビ行列の固有値から安定条件式を導出する必要がある。これまでの研究の多くは、ヤコビ行列を解析的に導くことはできても、ヤコビ行列から固有値を解析的に導くことができなかった。ただし、Simplest walking model と名付けられた受動歩行モデルを用いることによって、固有値の解析的な近似式[†]を導いた研究 [6] がある。このクラスのモデルでは、状態変数が他のモデルに比べて一つ少なくなり解析がかなり簡単になるが、線形近似した運動方程式から状態量を導く複雑な導出過程を経て得られた近似式からは、やはり力学的な構造を見出すには至らなかった。

本研究では、モデルのクラスとしては限定されるが、最も簡単な歩行モデルとして Simplest walking model を採用する。ま

原稿受付 2004年8月23日

*名古屋工業大学

*Nagoya Institute of Technology

[†]実際はヤコビ行列の近似式であるが、この式から容易に固有値を導くことができる。

ず、平衡点が形成される力学的な構造について議論する [11]. ここで、運動方程式を数値的に取り扱うこと以外は、解析的に議論する. 次に、状態変数 (ここでは、着地直後の状態) を陽に求めることは避けて、変数として取り扱い、平衡点におけるヤコビ行列の固有値を解析的に導き、安定条件式を導出する [11]. 状態変数を数値的に導くと、安定条件式から安定性が決まる.

これまで、脚の切り換え現象がエネルギーを消散させ、状態を小さくさせる特性をもつことから、安定性において重要な役割を果たしているのではとの考えが示された [8]. また、解析的に導かれたヤコビ行列の構成要素のもつ物理的な意味を考察し、平衡点が安定となるのは脚の切り換えによる働きが大きいとの解釈が示された [4].

本論文では、力学的解析から平衡点の安定メカニズムの構造を明らかにすることを目的とする. 2 章では、受動歩行モデルの運動方程式および脚切り換え式の導出ならびに単純化を行う. 3 章では、受動歩行システムの差分方程式を導出し、平衡点が形成される力学的構造を明らかにする. 4 章では、差分方程式を平衡点近傍で線形近似してヤコビ行列を導出し、その固有値から平衡点の安定条件式を求める. 5 章では、脚の振り運動 (着地時の股角度) に注目し、平衡点の安定性に対して力学的考察を行う.

2. 最も簡単な受動歩行モデル

2.1 運動方程式

コンパス型の受動歩行モデルを Fig. 1 に示す. l は脚の長さである. また、腰と足先のみに質量をもち、それぞれ M と m とで表す. γ はスロープ角度、 g は重力加速度を表す. このとき、運動方程式を導出すると

$$M(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = 0 \quad (1)$$

で与えられる. ただし、

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} Ml^2 + 2ml^2(1 - \cos \phi) & -ml^2(1 - \cos \phi) \\ ml^2(1 - \cos \phi) & -ml^2 \end{bmatrix}$$

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -ml^2(\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta}) \sin \phi \\ ml^2\dot{\theta}^2 \sin \phi \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} ml\{\sin(\theta - \phi + \gamma) - \sin(\theta + \gamma)\} \\ ml \sin(\theta - \phi + \gamma) \\ -Ml \sin(\theta + \gamma) \end{bmatrix} g$$

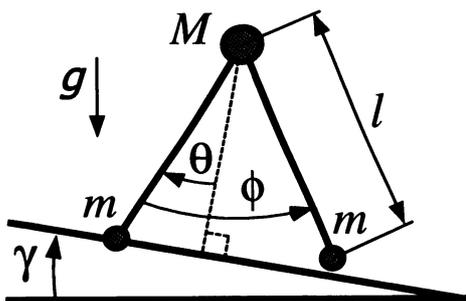


Fig. 1 Compass-like biped model

ここで、 $\theta (= [\theta, \phi]^T)$ は脚の角度ベクトルを表す. なお、3 章以降の解析を行いやすくするために、Fig. 1 に示す支持脚および遊脚の角度の向きを正とした. ここで、正の回転方向が異なる設定となっているので、式 (1) は一般的な運動方程式 (慣性行列が正定対称) とは異なっているので注意されたい.

2.2 脚切り換え式

遊脚着地の条件は、幾何学的な関係から次式で与えられる.

$$2\theta - \phi = 0 \quad (2)$$

遊脚が支持脚と交差する付近では、遊脚は着地して歩行が不成立となる. そこで、本研究では遊脚が支持脚と交差する付近では、遊脚は床面 (スロープ) に接触しないと仮定する. また、遊脚と床面との衝突現象を完全非弾性衝突と仮定する. さらに、着地の瞬間に支持脚が床面から離れるとする. このとき、着地前後において腰まわりの支持脚 (着地後は遊脚) の角運動量ならびに遊脚接地点まわりの全角運動量が保存される [12]. これらの角運動量の保存則から、着地前後では次のような関係式が得られる.

$$Q^+(\alpha)\dot{\theta}^+ = Q^-(\alpha)\dot{\theta}^- \quad (3)$$

ただし、

$$Q^+(\alpha) = \begin{bmatrix} ml^2(1 - \cos \alpha) & -ml^2 \\ 2ml^2(1 - \cos \alpha) + Ml^2 & -ml^2(1 - \cos \alpha) \end{bmatrix}$$

$$Q^-(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Ml^2 \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 $-$ は着地直前の状態、 $+$ は着地直後の状態を表す. α は着地時の股角度を示す. 式 (3) から着地直後の角速度ベクトル $\dot{\theta}^+$ は、次のように導出される.

$$\dot{\theta}^+ = (Q^+(\alpha))^{-1} Q^-(\alpha)\dot{\theta}^- = H(\alpha)\dot{\theta}^- \quad (4)$$

ただし、

$$H(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{M \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} & 0 \\ \frac{M(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

なお、着地直後の角度は、 $\theta^+ = -\alpha/2$ 、 $\phi^+ = -\alpha$ となる.

2.3 受動歩行モデルの単純化

本研究では、解析を単純化するために、腰の質量 M が足先の質量 m に比べて十分大きいもの ($M \gg m$) とした [6]. 本節では、この仮定に基づいて運動方程式 (1) および脚切り換え式 (4) を単純化する.

式 (1) の両辺を Ml^2 で割って行列展開すると次式が導かれる.

$$\left[1 + \frac{2m}{M}(1 - \cos \phi) \right] \ddot{\theta} - \frac{m}{M}(1 - \cos \phi)\ddot{\phi}$$

$$- \frac{m}{M}(\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta}) \sin \phi + \frac{m}{M} \frac{g}{l} [\sin(\theta - \phi + \gamma) - \sin(\theta + \gamma)]$$

$$- \frac{g}{l} \sin(\theta + \gamma) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{m}{M} \left[(1 - \cos \phi) \ddot{\theta} - \ddot{\phi} + \dot{\theta}^2 \sin \phi + \frac{g}{l} \sin(\theta - \phi + \gamma) \right] = 0 \quad (6)$$

ここで、 $M \gg m$ の仮定によって $m/M \approx 0$ ($m/M \neq 0$) と見なせるので、式 (5), (6) から最終的に次のような運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \cos \phi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}^2 \sin \phi \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} \sin(\theta + \gamma) \\ \frac{g}{l} \sin(\theta - \phi + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) は、支持脚の運動は遊脚の影響を受けないという特徴をもち、また腰の質量 M および足先の質量 m に関与しない形となっている。同様に、脚切り換え式 (4) は次のように簡単化できる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}^+ \\ \dot{\phi}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ (1 - \cos \alpha) \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^- \\ \dot{\phi}^- \end{bmatrix} \quad (8)$$

運動方程式 (7) および脚切り換え式 (8) によって構成される歩行モデルは Simplest walking model と呼ばれ、受動歩行の安定なリットサイクルの形成が報告されている [6]。3 章以降の解析には、この Simplest walking model を用いる。

3. 平衡点

3.1 差分方程式

受動歩行では、脚の振り運動（連続ダイナミクス）の解が、脚の切り換え現象（離散事象）によって、不連続にジャンプする。この一種のハイブリッドシステムから周期的な軌道が生成される。本研究では、着地直後の離散的な状態に注目して解析する。軌道がリットサイクルになると、着地直後の状態が平衡点として固定される (Fixed point) [13]。本節では、1 歩行周期の平衡点[†]を扱い、その差分方程式を導出する。

1 歩区間を着地直後から次の着地直後までとする。 k 歩目における着地直後の状態から、 $k+1$ 歩目の着地直前の状態へと脚の振り運動により遷移したとすると、エネルギー保存則から次式が導出される。ただし、遊脚は前方に着地するものと仮定し、 $0 < \alpha_k < \pi/2$, $0 < \alpha_{k+1} < \pi/2$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}_{k+1}^{-2} &= \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}_k^{+2} \\ &+ M g l \left\{ \cos \left(\frac{\alpha_k}{2} - \gamma \right) - \cos \left(\frac{\alpha_{k+1}}{2} + \gamma \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、遊脚の角速度は関与しない。式 (9) から着地直前の支持脚の角速度 $\dot{\theta}_{k+1}^-$ は、

$$\dot{\theta}_{k+1}^- = \sqrt{\dot{\theta}_k^{+2} + \frac{2g}{l} \left\{ \cos \left(\frac{\alpha_k}{2} - \gamma \right) - \cos \left(\frac{\alpha_{k+1}}{2} + \gamma \right) \right\}} \quad (10)$$

となる。

[†]分岐後には、2 歩行周期などの平衡点が現れる。

次に、 $k+1$ 歩目の着地直前の状態から直後の状態へと脚切り換えによって遷移したとすると、式 (8) から次式が成り立つ。

$$\dot{\theta}_{k+1}^+ = \cos \alpha_{k+1} \dot{\theta}_{k+1}^- = e_{k+1} \dot{\theta}_{k+1}^- \quad (11)$$

本研究では、 e_{k+1} ($0 < e_{k+1} < 1$) を損失係数と呼ぶことにする。また、 e_{k+1}^2 は床面との衝突におけるエネルギーの残存率となる。式 (10), (11) を整理することにより、次のような差分方程式が得られる。

$$\dot{\theta}_{k+1}^+ = e_{k+1} \sqrt{\dot{\theta}_k^{+2} + \frac{2g}{l} \left\{ \cos \left(\frac{\alpha_k}{2} - \gamma \right) - \cos \left(\frac{\alpha_{k+1}}{2} + \gamma \right) \right\}} \quad (12)$$

遊脚の角速度 $\dot{\phi}_{k+1}^+$ は、脚切り換え式 (8) から α_{k+1} および $\dot{\theta}_{k+1}^+$ の従属変数となるので、本研究では、 $\dot{\phi}_{k+1}^+$ についての差分方程式は考慮しない。

3.2 平衡点の力学的構造

本節では、平衡点が形成される力学的な構造を明らかにする。まず、平衡点となる場合、 $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\dot{\theta}_{k+1}^+ = \dot{\theta}_k^+$ となる。このとき、差分方程式 (12) は次のように整理できる。

$$\dot{\theta}_k^+ = \sqrt{\frac{4e_k^2 g}{l(1-e_k^2)} \sin \frac{\alpha_k}{2} \sin \gamma} \quad (13)$$

任意の $\dot{\phi}_k^+$ に対して式 (13) が成り立つことを考慮すると、 α_k , $\dot{\theta}_k^+$ および $\dot{\phi}_k^+$ の関係は Fig. 2 (a) の曲面 A のように図示される。ただし、スロープ角度 γ は 0.01 [rad] とし、脚の長さ l は 0.7 [m] とした。図から分かるように、平衡点は式 (13) で表される曲面 A 上に拘束される構造を有する。ここで、式 (13) は次式のように変形できる。

$$\frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}_k^{+2} \left(\frac{1}{e_k^2} - 1 \right) = 2 M g l \sin \frac{\alpha_k}{2} \sin \gamma \quad (14)$$

式 (14) の左辺と右辺は、それぞれ 1 歩区間における着地時の損失エネルギーと重力ポテンシャルからの供給エネルギーを示している。つまり、曲面 A は、エネルギーバランス状態を表しており、一つの力学的構造を成している。

次に、脚切り換え式 (8) から次式が導かれる。

$$\dot{\theta}_k^+ = \cos \alpha_k \dot{\theta}_k^- \quad (15)$$

$$\dot{\phi}_k^+ = (1 - \cos \alpha_k) \cos \alpha_k \dot{\theta}_k^- \quad (16)$$

式 (15), (16) から $\dot{\theta}_k^-$ を消去すると次式が得られる。

$$\dot{\phi}_k^+ = (1 - \cos \alpha_k) \dot{\theta}_k^+ \quad (17)$$

式 (17) から α_k , $\dot{\theta}_k^+$ および $\dot{\phi}_k^+$ の関係は Fig. 2 (a) の曲面 B のように図示される。脚切り換え現象によって、着地直後の状態が式 (17) で表される曲面 B 上に拘束される力学的構造になっている。なお、 γ および l には依存しない。さらに、曲面 B は曲面 A と交差して曲線 I を形成する。

さて、遊脚の角速度 $\dot{\phi}_k^+$ は、式 (13), (17) から次のように表される。

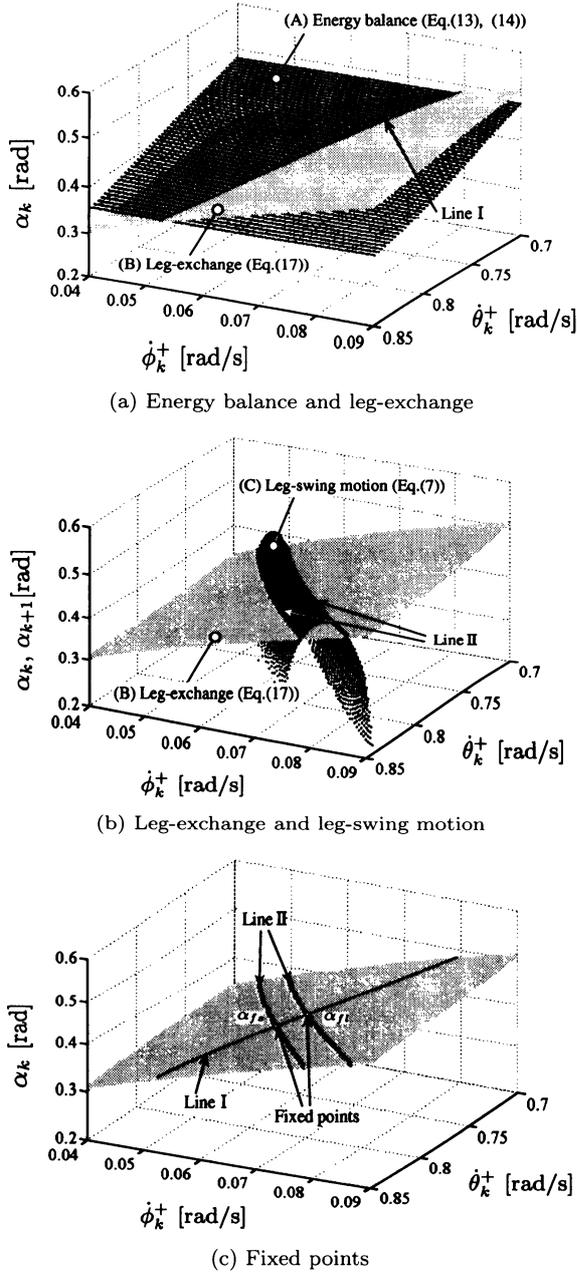


Fig. 2 Physical structure forming fixed points

$$\dot{\phi}_k^+ = (1 - \cos \alpha_k) \sqrt{\frac{4e_k^2 g}{l(1 - e_k^2)} \sin \frac{\alpha_k}{2} \sin \gamma} \quad (18)$$

式 (13), (18) から, 平衡点の状態は, α_k , $\theta_k^+(\alpha_k)$ および $\dot{\phi}_k^+(\alpha_k)$ の形式で表すことができる. そこで, 曲面 B 上の状態 α_k , θ_k^+ および $\dot{\phi}_k^+$ を初期値として, 式 (7) から α_{k+1} を数値的に導出した. ここで, 股角度が $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ となれば平衡点となる. θ_k^+ , $\dot{\phi}_k^+$ および α_{k+1} の関係を図示すると, Fig. 2 (b) に示すような上に凸な曲面 C となる. ただし, 歩行が成立した場合のみを図示している. ここで, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ を満たす状態は, 曲面 B と曲面 C との交わる二つの曲線 II 上に存在する.

最終的に, 平衡点は, Fig. 2 (c) に示すように, 曲線 I および

曲線 II の二つの交点となる. これらの平衡点は, Short period gait ($\alpha_{fs} = 0.40137$ [rad]) および Long period gait ($\alpha_{fl} = 0.41469$ [rad]) と呼ばれる歩容に対応している [2] [6] [10]. このように, 受動歩行の平衡点は, エネルギーバランス, 脚の切り換えおよび脚の振り運動が絡む力学的構造の中から形成される.

4. 平衡点の安定条件式

4.1 ヤコビ行列とその固有値

本章では, 差分方程式を平衡点近傍で線形近似して得られるヤコビ行列の固有値から平衡点の安定条件式を導出する. 3.1 節で述べたように, $\dot{\phi}_k^+$ は α_k および θ_k^+ の従属変数となることから, 着地直後の状態は $\mathbf{x}_k^+ = [\alpha_k, \theta_k^+]^T$ と表すことができる. ここで, \mathbf{x}_k^+ と \mathbf{x}_{k+1}^+ の間には, 次の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{x}_{k+1}^+ = f(\mathbf{x}_k^+) \quad (19)$$

また, 平衡点の状態を \mathbf{x}_f^+ とおくと, 平衡点では次の関係が成り立つ.

$$\mathbf{x}_f^+ = f(\mathbf{x}_f^+) \quad (20)$$

式 (19) を平衡点近傍で線形近似すると次式を得る.

$$\mathbf{x}_{k+1}^+ = f(\mathbf{x}_f^+) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^+} \right|_{\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}_f^+} \Delta \mathbf{x}_k^+ \quad (21)$$

ただし, $\Delta \mathbf{x}_k^+$ は摂動項である. 式 (20), (21) から, 次のような線形差分方程式が導かれる.

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1}^+ = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^+} \right|_{\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}_f^+} \Delta \mathbf{x}_k^+ \equiv \mathbf{J}_f \Delta \mathbf{x}_k^+ \quad (22)$$

ヤコビ行列 \mathbf{J}_f のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合, 平衡点は局所漸近安定となる. ここで, \mathbf{J}_f は次のような行列となる.

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f & \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \theta_k^+} \right|_f \\ \left. \frac{\partial \theta_{k+1}^+}{\partial \alpha_k} \right|_f & \left. \frac{\partial \theta_{k+1}^+}{\partial \theta_k^+} \right|_f \end{bmatrix} \quad (23)$$

\mathbf{J}_f の要素である $(\partial \theta_{k+1}^+ / \partial \alpha_k)|_f$ と $(\partial \theta_{k+1}^+ / \partial \theta_k^+)|_f$ は, 差分方程式 (12) から次式のようになる.

$$\left. \frac{\partial \theta_{k+1}^+}{\partial \alpha_k} \right|_f = a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + b_f \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{k+1}^+}{\partial \theta_k^+} \right|_f = a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \theta_k^+} \right|_f + c_f \quad (25)$$

ここで, 係数 a_f , b_f , c_f はそれぞれ以下のように与えられる.

$$a_f = \frac{1}{d_f} \frac{\partial e_f}{\partial \alpha_f} \left(\dot{\theta}_f^{+2} + \frac{4g}{l} \sin \frac{\alpha_f}{2} \sin \gamma \right) + e_f \frac{g}{2ld_f} \left(\sin \frac{\alpha_f}{2} \cos \gamma + \cos \frac{\alpha_f}{2} \sin \gamma \right) \quad (26)$$

$$b_f = e_f \frac{g}{2ld_f} \left(-\sin \frac{\alpha_f}{2} \cos \gamma + \cos \frac{\alpha_f}{2} \sin \gamma \right) \quad (27)$$

$$c_f = e_f \frac{\dot{\theta}_f^+}{d_f} \quad (28)$$

ただし、 d_f は以下のようになる。

$$d_f = \sqrt{\dot{\theta}_f^{+2} + \frac{4g}{l} \sin \frac{\alpha_f}{2} \sin \gamma} \quad (29)$$

また、 e_f は式 (11) で定義した損失係数の平衡点における値を示している。式 (24), (25) から、式 (23) のヤコビ行列 \mathbf{J}_f は、次式のように求まる。

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f & \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f \\ a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + b_f & a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \end{bmatrix} \quad (30)$$

最終的に、平衡点におけるヤコビ行列の固有値を求めると次式のようになる。

$$R_{pf} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \right)^2 + b_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f - c_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f} \quad (31)$$

4.2 安定条件式

本節では、平衡点が安定となるための条件式を導く。まず、式 (31) で表された固有値 R_{pf} の判別式は次式のようになる。

$$D_f = \frac{1}{4} \left(\left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \right)^2 + b_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f - c_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f \quad (32)$$

$D_f < 0$ の場合 平衡点が安定となるためには、次の条件式を満足しなければならない。

$$|R_{pf}|^2 = -b_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f < 1 \quad (33)$$

$D_f \geq 0$ の場合 固有値の絶対値の最大値は、次式で与えられる。

$$\max |R_{pf}| = \begin{cases} A_f + \sqrt{D_f} & \text{if } A_f \geq 0 \\ -A_f + \sqrt{D_f} & \text{if } A_f < 0 \end{cases} \quad (34)$$

ただし、

$$A_f = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + a_f \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f + c_f \right) \quad (35)$$

$\max |R_{pf}| < 1$ となるとき、平衡点は安定となる。したがって、

$A_f \geq 0$ の場合の安定条件式は、式 (34) から

$$(a_f + b_f) \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f - (c_f - 1) \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f + c_f < 1 \quad (36)$$

となる。また、 $A_f < 0$ の場合の安定条件式は、

$$-(a_f - b_f) \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \dot{\theta}_k^+} \right|_f - (c_f + 1) \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_f - c_f < 1 \quad (37)$$

となる。

以上のことから、式 (33), (36), (37) の三つの安定条件式を満足するとき、平衡点は安定となる。ここで、安定条件式中の係数 a_f , b_f および c_f は、平衡点の状態量を式 (26), (27), (28) に代入することで定数となる。言い換えると、平衡点が安定条件式の一部を成している。

ここで、着地のタイミングが陽に求まらないうえで、線形近似などによって着地時の状態を解析的に求めたとしても、複雑な式の導出および展開を伴い、かえって力学的な考察を困難とさせる。そこで、偏微分 $(\partial \alpha_{k+1} / \partial \alpha_k)|_f$ および $(\partial \alpha_{k+1} / \partial \dot{\theta}_k^+)|_f$ は変数として扱うことにする。

5. 安定性解析と力学的考察

5.1 大域的漸近安定性

本研究では、着地時の股角度を脚の振り運動（連続ダイナミクス）のみに依存する特徴量として注目している。安定条件式中の変数 $(\partial \alpha_{k+1} / \partial \alpha_k)|_f$ および $(\partial \alpha_{k+1} / \partial \dot{\theta}_k^+)|_f$ は、それぞれ平衡点における着地直後の股角度 α_k および支持脚の角速度 $\dot{\theta}_k^+$ の微小変化が、次の着地時の股角度 α_{k+1} に及ぼす影響の変化を示している。

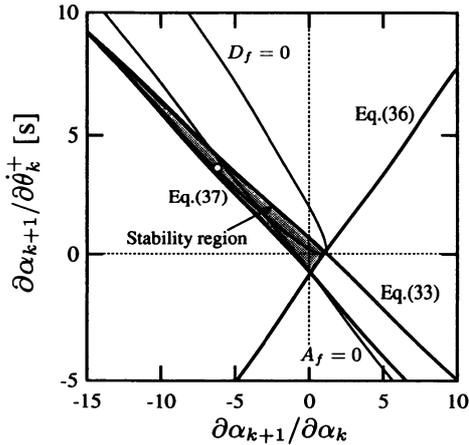
まず、特殊なケースとして、 $\partial \alpha_{k+1} / \partial \alpha_k = \partial \alpha_{k+1} / \partial \dot{\theta}_k^+ = 0$ が常に成り立つ場合を考える。これは、着地時の股角度が変化しない歩容 ($\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_r$) を意味する。このとき、平衡点におけるヤコビ行列の固有値は、式 (13), (31) から次式のように導かれる。

$$R_{rf} = c_f = \cos^2 \alpha_r \quad (38)$$

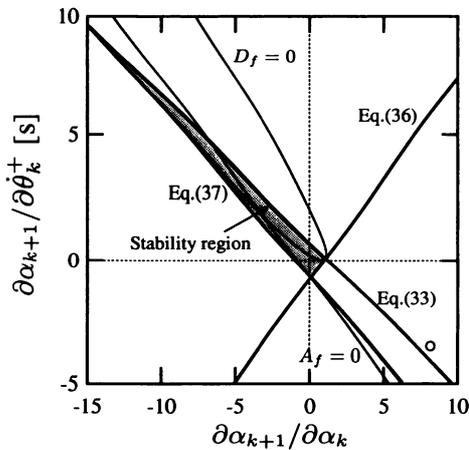
ただし、 $R_{rf} = 0$ も導かれるが、平衡点の安定性を議論するうえでは関与しないので、ここでは考慮しない。式 (38) から $|R_{rf}| < 1$ となり、平衡点の局所的な漸近安定性は常に満たされることが分かる。そこで、大域的な安定性についても調べてみる。

差分方程式 (19) を任意の状態 \mathbf{x}_k^+ 近傍で線形近似して得られるヤコビ行列（各係数については付録 A 参照）の固有値を求めると次式のようになる。

$$R_{rk} = c_k = e_r \sqrt{\frac{\frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}_k^{+2}}{\frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}_k^{+2} + 2 M g l \sin \frac{\alpha_r}{2} \sin \gamma}} \quad (39)$$



(a) Long period gait



(b) Short period gait

Fig. 3 Relationship between stability region and fixed point

式 (39) において、 e_r は損失係数のために $0 < e_r < 1$ となる。また、ルートの項は、 $2Mgl \sin \frac{\alpha}{2} \sin \gamma$ (供給エネルギー) が常に正となるために、1 より小さい正の値となる。したがって、 $|R_{rk}| < 1$ となり、平衡点は大域的漸近安定となる (付録 B 参照)。ただし、遊脚は前方に着地するものとする。

このように、着地時の股角度が常に一定となるように前方に倒れるだけで、平衡点の大域的な安定性が保証されるという事実は、非常に重要な知見だと考えられる。受動歩行の研究で取り上げられる Rimless spoked wheel [1] [11] [14] は、この条件を満たす具体例である。

5.2 平衡点と安定領域

Fig. 3 (a), (b) に、3.2 節で示した Long period gait および Short period gait の各平衡点が安定となるための領域を安定条件式 (33), (36), (37) を基にハッチングで示した。ただし、横軸は $\partial\alpha_{k+1}/\partial\alpha_k$ 、縦軸は $\partial\alpha_{k+1}/\partial\theta_k^+$ である。安定条件式中の係数は、Long period gait の場合では $a_f = 1.299$ [1/s], $b_f = -1.490$ [1/s] および $c_f = 0.837$, また、Short period gait の場合では $a_f = 1.241$ [1/s], $b_f = -1.428$ [1/s] および $c_f = 0.847$ となる。さらに、数値 (偏) 微分法から求めた平衡点における $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\alpha_k)|_f$, $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\theta_k^+)|_f$ の値を○印で併

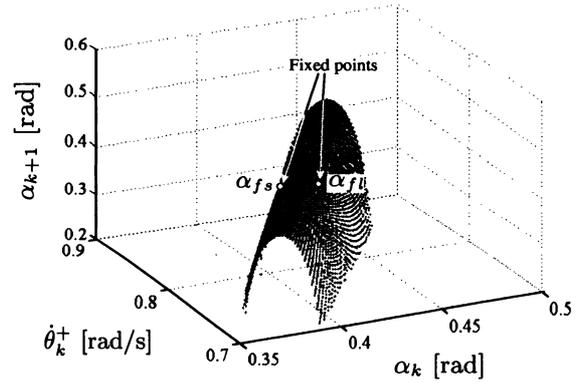


Fig. 4 Inter-leg angle constrained by leg-swing motion

記した。○印が安定領域内にあれば、平衡点は安定となる。ここで、Fig. 3 に示すハッチング領域は、平衡点の状態量のみによって決まることから、平衡点が潜在的にもつ安定領域と言える。また、 $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\alpha_k)|_f$, $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\theta_k^+)|_f$ は、脚の振り運動に支配されることから、脚のダイナミクスには平衡点を安定化させる力学的特性が本質的に備わっている。

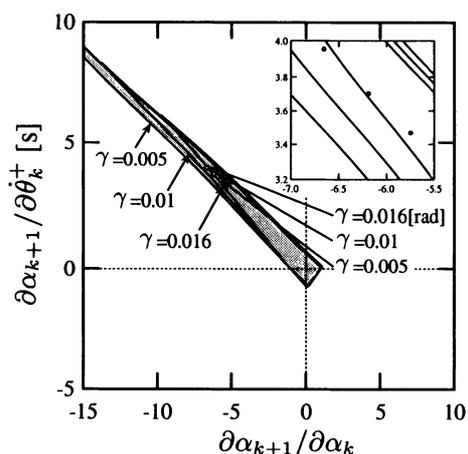
図から分かるように、二つの平衡点ともに安定領域が存在し、さらに両者の間には大きな違いが見られない。Long period gait の場合は、平衡点が安定領域内に含まれて安定となる (Fig. 3 (a) 参照)。一方、Short period gait の場合は、安定領域から大きく外れて不安定となる (Fig. 3 (b) 参照)。この違いは、次のような $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\alpha_k)|_f$ および $(\partial\alpha_{k+1}/\partial\theta_k^+)|_f$ の正負の違いに依存している。

$$\left. \frac{\partial\alpha_{k+1}}{\partial\alpha_k} \right|_f < 0, \left. \frac{\partial\alpha_{k+1}}{\partial\theta_k^+} \right|_f > 0 \quad (\text{Long period gait}) \tag{40}$$

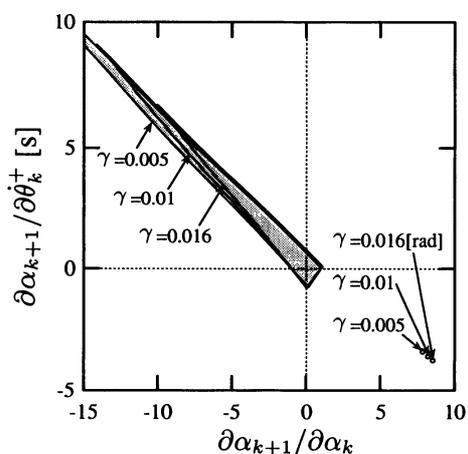
$$\left. \frac{\partial\alpha_{k+1}}{\partial\alpha_k} \right|_f > 0, \left. \frac{\partial\alpha_{k+1}}{\partial\theta_k^+} \right|_f < 0 \quad (\text{Short period gait}) \tag{41}$$

Fig. 4 は、 α_k , θ_k^+ および α_{k+1} の関係を数値的に求めて図示したものである。また、Long period gait および Short period gait の平衡点を○印で併記した。図から分かるように、3 変数の関係は上に凸な曲面を成しており、 α_k および θ_k^+ の微小変化が着地時の股角度 α_{k+1} に及ぼす影響の変化が、式 (40), (41) のような対称的な二つのパターンに拘束される。このような特性は、二重振り子としての脚の振り運動に起因し、スロープ角度が変化しても変わらない。

Fig. 5 は、スロープ角度 γ を変化させた場合の安定領域と平衡点の関係を図示したものである。Long period gait と Short period gait の安定領域はやはりほぼ同じで、ほとんどが第 2 象限に位置する。したがって、平衡点が安定となるためには、式 (40) に示すような形で着地時の股角度が決まる脚の振り運動が理にかなっていると言える。また、スロープ角度 γ が大きくなると、主に式 (37) の安定条件の影響により安定領域が徐々に欠けていく。 γ が 0.016 [rad] では、Long period gait の平衡点でも安定領域から外れ不安定となり、結果的に分岐が起こる。



(a) Long period gait



(b) Short period gait

Fig. 5 Variation of stability region and fixed point about slope angle

6. 結 論

本研究では、受動歩行の解析が最も容易となるモデルとして、Simplest walking modelを採用した。さらに、着地時の状態を解析的に求めることはせず、変数として取り扱った。解析の結果、受動歩行の平衡点が安定となるメカニズムが、次のような力学的な構造で表現できることを示した。

- (1) 受動歩行の平衡点は、エネルギーバランス、脚の切り換えおよび脚の振り運動により形成される。
- (2) 平衡点の安定条件式（安定領域）は、平衡点によって一意に決まる。
- (3) そして、平衡点の安定性は、脚の振り運動（着地時の股角度）が、安定条件式を満足し得るものかによって決まる。

(1)において、エネルギーバランスは、受動歩行を支配する差分方程式からの拘束条件と等価である。また、脚の切り換えは、着地直後の状態をある一定の状態に拘束する。さらに、平衡点の数（二つ存在）は、脚の振り運動の特性に起因する。(2)において、平衡点の安定条件式は、差分方程式を平衡点近傍で線形近似して得られるヤコビ行列の固有値から解析的に導出し

た。なお、(1)で形成された平衡点が安定条件式の一部を成している。(3)において、望ましい脚の振りパターンが存在する。

本研究では、着地時の股角度に注目したが、Rimless spoked wheelのように一定の股角度になるように前方に倒れるだけで大域的な安定性が保証されることは、示唆に富んだ結果と言える。特に、受動歩行の研究の中で、これを解析的に示せた点に意義がある。

今後は、より一般的な歩行モデルも視野に入れながら、まず受動歩行の安定メカニズムの構造に基づいた平衡点の生成および安定化法を確立した上で、実機の機構設計や制御系設計などにつなげる。

参 考 文 献

- [1] T. McGeer: "Passive Dynamic Walking," The Int. J. of Robotics Research, vol.9, no.2, pp.62-82, 1990.
- [2] T. McGeer: "Passive Walking with Knees," Proc. of the 1990 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.1640-1645, 1990.
- [3] 衣笠哲也, 大須賀公一, 細川智生: "胴体の姿勢制御を伴う2足歩行ロボット Emu の受動的歩行—安定解析と歩行実験—", 日本ロボット学会誌, vol.22, no.2, pp.200-206, 2004.
- [4] 杉本靖博, 大須賀公一, 藤本健治, 平田健太郎: "受動的動歩行の安定性に関する一考察—ポアンカレマップの構造解釈からのアプローチ—", 第9回ロボティクス・シンポジウム予稿集, pp.192-197, 2004.
- [5] 浅野文彦, 羅志偉, 山北昌毅: "受動歩行規範型歩容生成問題の定式化 (I) 力学原理と制御系設計", 第21回日本ロボット学会学術講演会予稿集 CD-ROM, 3I11, 2003.
- [6] M. Garcia, A. Chatterjee, A. Ruina and M. Coleman: "The Simplest Walking Model: Stability, Complexity, and Scaling," J. of Biomechanical Engineering, vol.120, pp.281-288, 1998.
- [7] A. Goswami, B. Thuilot and B. Espiau: 'Compass-Like Biped Robot Part: Stability and Bifurcation of Passive Gaits,' Technical Report 2996 INRIA, 1996.
- [8] A. Goswami, B. Thuilot and B. Espiau: "A Study of the Passive Gait of a Compass-Like Biped Robot: Symmetry and Chaos," The Int. J. of Robotics Research, vol.17, no.12, pp.1282-1301, 1998.
- [9] A. Sano, Y. Ikemata and H. Fujimoto: "Analysis of Dynamics of Passive Walking from Storage Energy and Supply Rate," Proc. of the 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.2478-2483, 2003.
- [10] Y. Ikemata, A. Sano and H. Fujimoto: "Analysis of Limit Cycle in Passive Walking," Proc. of the 2003 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp.601-606, 2003.
- [11] 池俣吉人, 佐野明人, 藤本英雄: "差分方程式による受動歩行の平衡点とその安定構造の解析", 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'04 講演論文集, 1P1-L1-52, 2004.
- [12] Y. Hurmuzlu and T. Chang: "Rigid Body Collisions of a Special Class of Planar Kinematic Chains," IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol.22, no.5, pp.964-971, 1992.
- [13] 香田徹: 離散力学系のカオス, コロナ社, 1998.
- [14] M.J. Coleman, A. Chatterjee and A. Ruina: "Motions of A Rimless Spoked Wheel: A Simple 3D System with Impacts," Dynamics and Stability of Systems, vol.12, no.3, pp.139-160, 1997.

付録 A. 任意の状態 x_k^+ におけるヤコビ行列の係数

各係数は以下ようになる。

$$a_k = \frac{1}{d_k} \frac{\partial e_{k+1}}{\partial \alpha_{k+1}} \left\{ \dot{\theta}_k^{+2} + \frac{2g}{l} \left(\cos \frac{\alpha_k}{2} - \cos \frac{\alpha_{k+1}}{2} \right) \cos \gamma \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2g}{l} \left(\sin \frac{\alpha_k}{2} + \sin \frac{\alpha_{k+1}}{2} \right) \sin \gamma \Big\} \\
 & + e_{k+1} \frac{g}{2ld_k} \left(\sin \frac{\alpha_{k+1}}{2} \cos \gamma + \cos \frac{\alpha_{k+1}}{2} \sin \gamma \right) \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$b_k = e_{k+1} \frac{g}{2ld_k} \left(-\sin \frac{\alpha_k}{2} \cos \gamma + \cos \frac{\alpha_k}{2} \sin \gamma \right) \quad (A.2)$$

$$c_k = e_{k+1} \frac{\dot{\theta}_k^+}{d_k} \quad (A.3)$$

ただし, d_k^2 は次式のようになる.

$$\begin{aligned}
 d_k^2 = & \dot{\theta}_k^{+2} + \frac{2g}{l} \left\{ \left(\cos \frac{\alpha_k}{2} - \cos \frac{\alpha_{k+1}}{2} \right) \cos \gamma \right. \\
 & \left. + \left(\sin \frac{\alpha_k}{2} + \sin \frac{\alpha_{k+1}}{2} \right) \sin \gamma \right\} \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

付録 B. 固有値と大域的漸近安定性

一般的な離散時間システムの大域的漸近安定性を示す. まず, k ステップ目における状態を, 次のように平衡点の状態 \mathbf{x}_0 と n 個の微小変化量 $\Delta \mathbf{x}_{i,k}$ の和で表現する. ただし, $\mathbf{x}_{0,k} = \mathbf{x}_0$ とする.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n,k} & = \mathbf{x}_{n-1,k} + \Delta \mathbf{x}_{n-1,k} \\
 & = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{x}_{i,k} \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

式 (B.5) の n および初期の微小変化量 $\Delta \mathbf{x}_{i,0}$ によって, 任意の初期状態を表すことができる. 次に, 状態 $\mathbf{x}_{n,k}$ の非線形写像である差分方程式は, 次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n,k+1} & = f(\mathbf{x}_{n,k}) \\
 & = f(\mathbf{x}_{n-1,k} + \Delta \mathbf{x}_{n-1,k}) \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

式 (B.6) を Taylor 展開し, 二次以降の項を無視すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n,k+1} & = f(\mathbf{x}_{n-1,k}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{n-1,k}} \Delta \mathbf{x}_{n-1,k} \\
 & \equiv f(\mathbf{x}_{n-1,k}) + \mathbf{J}_{n-1,k} \Delta \mathbf{x}_{n-1,k} \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{J}_{n-1,k}$ は状態 $\mathbf{x}_{n-1,k}$ におけるヤコビ行列である. 式 (B.6), (B.7) の演算を繰り返すと, 次式が得られる.

$$\mathbf{x}_{n,k+1} = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{J}_{i,k} \Delta \mathbf{x}_{i,k} \quad (B.8)$$

ここで, 式 (B.8) において $\mathbf{x}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ および $\Delta \mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{J}_{i,k} \Delta \mathbf{x}_{i,k}$ の関係式を用いると, 状態 $\mathbf{x}_{n,k}$ は平衡点 \mathbf{x}_0 および初期の微小変化量 $\Delta \mathbf{x}_{i,0}$ によって, 最終的に次のように表される.

$$\mathbf{x}_{n,k} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\prod_{j=0}^k \mathbf{J}_{i,j} \right) \Delta \mathbf{x}_{i,0} \right] \quad (B.9)$$

式 (B.9) のヤコビ行列 $\mathbf{J}_{i,j}$ のすべての固有値の絶対値が 1 未満であれば, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{n,k} = \mathbf{x}_0$ となる.

以上のことから, 任意の状態におけるヤコビ行列のすべての固有値の絶対値が 1 未満となると, 平衡点は大域的漸近安定となる.



池俣吉人 (Yoshito Ikemata)

1976 年 1 月 10 日生. 1998 年名古屋工業大学工学部機械工学科卒業. 2000 年同大学院工学研究科生産システム工学専攻博士前期課程修了. 現在同大学院博士後期課程に在学. 受動歩行に関する研究に従事. (日本ロボット学会学生会員)



藤本英雄 (Hideo Fujimoto)

1947 年 7 月 7 日生. 1970 年名古屋大学工学部機械学科卒業. 現在, 名古屋工業大学教授. ものづくりテクノセンター長. 医学工学, 生産システム, ロボットなどの知能化, バーチャルリアリティ・感性の工学に興味を持つ. 2000 年 Japan-USA Flexible Automation Symposium 最優秀論文賞受賞. 第 6 回ロボティクス・シンポジウム優秀論文賞受賞. 日本機械学会生産システム部門賞 (2002 年功績賞), 2004~2005 グッドデザイン賞を各々受賞. ASME 1998 Japan-USA Flexible Automation Symposium プログラム委員長. 1997, 1998 年 SICE 常務理事部門協議会議長. 日本機械学会評議員, フェロー. スケジューリング学会会長. 1991, 1992 年本学会誌編集委員. 工学博士. (日本ロボット学会正会員)



佐野明人 (Akihito Sano)

1963 年 2 月 8 日生. 1987 年 3 月岐阜大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了. 現在, 名古屋工業大学大学院工学研究科教授. 受動歩行, 人間-機械系, 触覚テクノロジーの研究に従事. 日本機械学会賞研究奨励賞, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス部門賞 (業績賞) ならびに部門一般表彰 (ROBOMECH 表彰), Best Technical Exhibition Award in 1st IEEE TexCRA2004 を各々受賞. 2004・2005 年度本学会評議員. 日本機械学会, 計測自動制御学会, 日本バーチャルリアリティ学会等の会員. 博士 (工学). (日本ロボット学会正会員)