

Original Paper

A Study of Optimal Arrangement in a Reset Limited-cycle Problem with Multiple Periods — With Fewer Special Workers —

Hisashi YAMAMOTO,^{†1} Jing SUN,^{†2} Masayuki MATSUI^{†3} and Xianda KONG^{†1}

Abstract

In today's society, there is extremely keen competition among manufacturing enterprises. Under such circumstances, it is vital for these enterprises to meet the delivery date deadlines. Under uncertain conditions, the result or efficiency of a period is often controlled not only by the risks of this period, but also by the risks generated beforehand. This kind of problem is called the limited-cycle problem with multiple periods. In this research, the issue of minimum expected risk in a certain period will be discussed, assuming that risk appears in multiple periods repeatedly. This paper considers the rules for an optimal arrangement with minimum total expected risk in a limited-cycle scheduling problem with multiple periods. Firstly, we consider the situation involving two kinds of workers who have different processing efficiencies. In this situation, we propose the properties of optimal arrangement where there is one special worker who has special processing efficiency. Secondly, the properties are proven mathematically. Finally, we reveal the unknown part through numerical experiments. This paper is significant as one step to derive the optimal arrangement theoretically.

Key words: limited-cycle problem with multiple periods, optimal arrangement, manufacturing line, production seat system

^{†1} Tokyo Metropolitan University

^{†2} Nagoya Institute of Technology

^{†3} The University of Electro-Communications

Received : July 26, 2010

Accepted : October 21, 2011

原著論文

リセット多期間制約サイクル問題における最適配置法則に関する考察 ～少数の特殊な作業者が居る場合～

山本 久志^{†1}, 孫 晶^{†2}, 松井 正之^{†3}, 孔 憲達^{†1}

各期間において、制約された対象（例えば目標時間が存在する加工時間）の存在と、それに伴うリスクの発生を考え、そのような対象とリスクが多期間にわたり反復的（すなわち、サイクリック）に発生する状況を考える。本論文では、そのような状況においてリスクを最小にする問題（多期間制約サイクル問題）に関する最適配置問題について考察する。最初に、リセット多期間制約サイクル問題モデルの下で、最適配置を理論的に導き出すための一歩として、作業者が2種類居る場合に着目し、特殊作業者が1人居る場合の最適配置法則（定理）を提案する。次に、最適配置が一意に決定できない場合があるため、加工時間を指數分布と仮定した場合について、数値実験により最適配置を導出する。

キーワード：多期間制約サイクル問題、最適配置法則、生産ライン、生産座席予約問題

1. はじめに

不確定下では、ある期間の成果や効率はその期間だけではなく、それ以前に発生したリスクに左右される状況は多く考えられる[1]。通常の直列型生産ラインを例として考える場合、ある工程（期間）が納期（制約）を満足するかどうかは前工程（前の期間）の状態に依存する。この種のサイクル制約をもつ期間が多期間にわたる問題を多期間制約サイクル問題と呼んでいる[2]。

多期間制約サイクル問題は、生産管理や品質管理における納期制約問題[3]、ラインバランス問題や生産座席予約問題に適用される[4]。

多期間制約サイクル問題においては、各工程において加工が遅れた場合にその影響が後工程に依存しない、または当該工程で人員増強等により後工程に影響させないと仮定している（本論文ではリセットモデルと呼ぶ）[5]。しかし、各工程において加工が遅れた場合にその影響が後工程に直接影響があることも考えられる（本論文ではノンリセットモデルと呼ぶ）[6]。

山本他[2]では、リセットモデルの下で、各工程に各作業者をどのように配置すれば最も効率的、経済的かという問題（最適配置問題）の研究を行い、山本他[7]では、リセットモデルの下で、期待リスクを効率的に算出するアルゴリズムを提案し、システムの最小期待費用をもたらす作業者の最適配置法則の基礎研究を行なった。

本論文では、最適配置を理論的に導き出すための一歩と

^{†1} 首都大学東京

^{†2} 名古屋工業大学

^{†3} 電気通信大学

受付：2010年7月26日、再受付（2回）

受理：2011年10月21日

して、リセットモデルにおいて処理速度が異なる2種類の作業者が存在し、一方の種類の作業者が1人で（本論文では特殊作業者と呼び、Aで表す）、その他の作業者（本論文では一般作業者と呼び、Bで表す）が特殊作業者とは異なる処理速度を持つ時の最適配置問題を考え、ある配置が最適配置となる条件を導出する。また、その条件以外にも最適配置となる場合が存在するため、その条件を調査するために数値実験を行った。

本論文の構成は以下の通りである。2章では、リセット多期間制約サイクルモデル及び特殊作業者が1人居る場合の最適配置問題について述べる。3章において、特殊作業者が1人居り、残りの作業者が一般作業者である場合の最適配置法則を導く。4章では、3章の問題において加工時間を指數分布と仮定した場合について数値実験により最適配置を導出し、その結果を考察する。最後に本論文のまとめと今後の課題を述べる。

2. モデルと問題の説明

2.1 リセット多期間制約サイクルモデル

本論文で考察するリセットモデルを以下に述べる[2]。

- (1) 直列の生産ラインを考える。その生産ラインの工程数をnとする。
- (2) 製品は工程1, 工程2, …, 工程nの順で加工され、n工程で製品1個を加工する。
- (3) 仕掛品は、全てZ時間で次の工程に移り加工される。すなわち、Zは工程全体のサイクル時間となる。また、本論文では1期間の長さはサイクル時間と同じであり、製品はn期間で完成されることになる。このことが本論文で考察する問題に”多期間”を加えている由縁である。

ある。

次に、作業者の加工時間の仮定を述べる。

- (4) 作業者の加工時間は互いに独立で、作業者 l の加工時間 T_l は、確率密度関数 $f_l(t)$ の確率分布に従うとする。ただし、 t は時間を表し、 $l = A, B$ である。
- (5) 上述したように Z は工程全体のサイクル時間を表すが、各工程においては目標の時間でもあるので、以後 Z を目標加工時間と呼ぶことにする[2]。

このとき、 $l = A, B$ に対して、

P_l : 作業者 l が遊休となる確率、すなわち、 $P_l = \Pr\{T_l \leq Z\}$ である。

Q_l : 作業者 l が遅れとなる確率、すなわち、 $Q_l = \Pr\{T_l > Z\}$ である。

TS_l : 作業者 l の期待遊休時間、すなわち、

$$TS_l = E[(Z - T_l)I(T_l \leq Z)]$$

TL_l : 作業者 l の期待遅れ時間、すなわち、

$$TL_l = E[(T_l - Z)I(T_l > Z)]$$

ここで、 $I(\bullet)$ は指標関数で、

$$I(K) = \begin{cases} 1 & (K \text{ が真}) \\ 0 & (K \text{ が偽}) \end{cases}$$

と定義する。

次に、発生する費用として以下を考える(図1)。

本論文では、各工程には、作業者や資源が、加工しているかしないかにかかわらず、時間 Z だけ拘束されていると考えるために目標加工時間 Z に対して単位時間あたり $C_t (\geq 0)$ の費用を考える。また、加工時間が遅れそうな場合には作業者の残業や追加の資源を投入するなどして、加工が時間 Z になるようにすることを仮定し、単位時間あたり遅れ費用 $C_p^{(k)}$ を考える(このことが本論文で考察するモデルをリセットモデルと呼ぶ由縁である)。逆に、加工が Z 以下で終了すると次の工程に移るまでに仕掛の在庫が生じることを想定し、単位時間あたり遊休費用 $C_s (\geq 0)$ を考える。

以上のことをまとめると次となる。

- (6) 各工程では、目標加工時間 Z に対して単位時間あたり $C_t (\geq 0)$ の費用が発生する。
- (7) 各工程において、加工時間が Z 以下になった場合、単位時間あたり遊休費用 $C_s (\geq 0)$ が発生する。逆に、

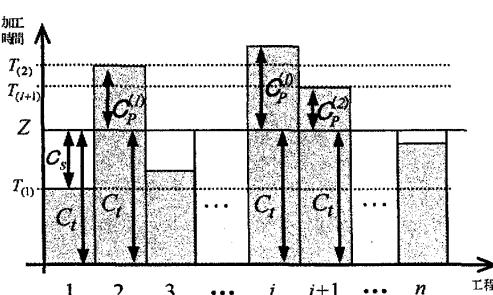


図1 加工時間と費用の関係

- (8) k 工程連続して目標加工時間 Z を超えた場合は、超過した k 番目の工程において単位時間あたり遅れ費用 $C_p^{(k)}$ が発生する。ただし、 $k = 1, 2, \dots, n$ である。また、 $0 \leq C_p^{(1)} \leq C_p^{(2)} \leq \dots \leq C_p^{(n)}$ とする。

加工時間と費用の関係を、縦軸に加工時間、横軸に工程をとった図1により説明する。工程 i の加工時間を $T_{(i)}$ とすると、例えば、工程1では、目標加工時間 Z までに加工時間 $T_{(1)}$ で終了している ($T_{(1)} < Z$)。この場合には、工程1でかかった総費用は目標加工時間 Z に対する加工費用 C_t (単位時間あたり) に、 $T_{(1)}$ から Z までの間に発生する C_s (単位時間あたり) が加算される。一方、工程2では、目標加工時間 Z までに加工時間 $T_{(2)}$ が終了していない ($T_{(2)} > Z$)。この場合は、目標加工時間 Z に対して C_t (単位時間あたり) に Z から $T_{(2)}$ までに発生する $C_p^{(1)}$ (単位時間あたり) が加算される。ここで注意されたいのは、工程 i と $i+1$ の場合のように、2回連続して遅れた場合には、工程 $i+1$ には Z から $T_{(i+1)}$ までに $C_p^{(2)}$ ($C_p^{(2)} \geq C_p^{(1)}$) が発生する。

このような状況のもとで、本論文では、各作業者をどのように各工程に割り当てる(配置する)れば、最も期待費用が安くなるかという問題を考察している。

2.2 最適配置問題

最適配置問題を考える前に、さらに以下の記号を定義する。 $i=1, 2, \dots, n$ に対して

- $\pi(i)$: 1人の特殊作業者 A を工程 i に配置し、 $n-1$ 人の一般作業者 B を工程 i 以外の工程に配置する配置
 $TC(n; \pi(i))$: 配置 $\pi(i)$ で作業者が配置されている場合の工程 n までの期待費用

$$TC(n; \pi(i)) = nC_t Z + f(n; \pi(i)) \quad (1)$$

とする。ここで、

- $f(n; \pi(i))$: 配置 $\pi(i)$ において工程 n までに発生した遊休と遅れによる期待費用
 である。この時、最適配置問題は

$$TC(n; \pi^*) = \min_{i=1, 2, \dots, n} TC(n; \pi(i)) \quad (2)$$

を満足する配置 π^* を求める問題として表される。

ただし、(1)式からわかるように、目標加工時間 Z が一定の場合、工程 n までの総目標加工費用 $nC_t Z$ が一定なので、この場合、(2)式を

$$f(n; \pi^*) = \min_{i=1, 2, \dots, n} f(n; \pi(i)) \quad (3)$$

に書き直すと問題が簡単になる。

ここで、配置 π^* を本論文では最適配置と呼ぶ。

3. 特殊作業者が1人居る場合の最適配置法則

本章では、 $n-1$ 人の一般作業者の加工時間が同じ分布に従い、1人の特殊作業者Aの作業時間分布が異なる場合を考える(図2)。

この時、期待費用 $f(n; \pi(i))$ は

$$f(n; \pi(i)) = C_S((n-1)TS_B + TS_A) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^l CF(l, \alpha; \pi(i)) \right) \quad (4)$$

となる。ただし、 $\alpha = 1, 2, \dots, l$ ($l = 1, 2, \dots, n$) に対して、 $CF(l, \alpha; \pi(i))$ は、配置 $\pi(i)$ の時、工程 $l-\alpha$ が遅れず、工程 $l-\alpha+1$ から工程 l までの α 工程が遅れた時の工程 l で発生する期待遅れ費用である。

ここで、最適配置法則(定理)を導出するために、有用な補助定理1と2を示す。

補助定理1

$i = 1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(i)) \\ &= (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n-i-1} Q_B^{a-1} (C_p^{(a+1)} - C_p^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^{i-1} Q_B^{a-1} (C_p^{(a+1)} - C_p^{(a)}) \right) \\ &+ (C_p^{(i+1)} - C_p^{(i)}) \left(\frac{TL_A}{Q_A} - \frac{TL_B}{Q_B} \right) Q_B^i Q_A \end{aligned} \quad (5)$$

が成立する。ただし、

$$Q_A = \int_Z^\infty f_A(t) dt \quad (6)$$

$$Q_B = \int_Z^\infty f_B(t) dt \quad (7)$$

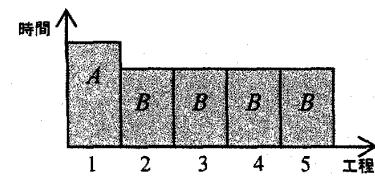
$$TL_A = \int_Z^\infty (t-Z) f_A(t) dt \quad (8)$$

$$TL_B = \int_Z^\infty (t-Z) f_B(t) dt \quad (9)$$

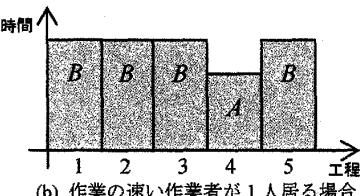
である。

証明) 付録に示す。

(5)式の正負が判定できれば、期待費用 $f(n; \pi(i))$ が i に対して増加するか減少するかが判定できる。その判定に有効な補助定理2を示す。



(a) 作業の遅い作業者が1人居る場合



(b) 作業の早い作業者が1人居る場合

図2 特殊作業者が1人居る場合

補助定理2

$$g(i, n) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n-i-1} Q_B^{a-1} (C_p^{(a+1)} - C_p^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^{i-1} Q_B^{a-1} (C_p^{(a+1)} - C_p^{(a)}) \quad (10)$$

すると、以下の性質が成立する。

- 1) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少ならば、 $i \geq \frac{n}{2}$ に対して $g(i, n) \leq 0$ 、 $i < \frac{n}{2}$ に対して $g(i, n) > 0$ である。
- 2) $n = 2m$ とする。この時、 $j = 0, 1, \dots, m-1$ に対して $g(j+m, n) = -g(m-j, n)$ である。特に、 $g(m, n) = 0$ である。
- 3) $n = 2m+1$ とする。この時、 $j = 1, 2, \dots, m-1$ に対して $g(j+m, n) = -g(m+1-j, n)$ である。

証明) 付録に示す。

以上の補助定理より、特殊作業者が1人居る場合の最適配置法則(定理)は以下に得られる。

定理

- 1) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少で $Q_B < Q_A$ かつ $\frac{TL_B}{Q_B} < \frac{TL_A}{Q_A}$ ならば、配置 $\pi(1)$ が最適配置となる。
- 2) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少で $Q_B \geq Q_A$ かつ $\frac{TL_B}{Q_B} \geq \frac{TL_A}{Q_A}$ ならば、最適配置 $\pi(i)$ は($i \geq \frac{n}{2}$)に存在する。

証明)

$i=1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$S_i \equiv (C_P^{(i+1)} - C_P^{(i)}) \left(\frac{TL_A}{Q_A} - \frac{TL_B}{Q_B} \right) Q'_B Q_A \quad (11)$$

とすると、補助定理 1 と(10)式より、

$$f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(i)) = (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot g(i, n) + S_i \quad (12)$$

となる。

1) の場合

$f(n; \pi(i))$ が図 3 に示すようになることを示す。この場合

は、 $S_i > 0$ となる。また、補助定理 2 の 1) より $i < \frac{n}{2}$ に対して $g(i, n) > 0$ となること、また $Q_B < Q_A$ であることより、(12)式から

$i < \frac{n}{2}$ に対して

$$f(n; \pi(i+1)) > f(n; \pi(i)) \quad (13)$$

が成立する。次に、

$i \geq \frac{n}{2}$ に対して

$$f(n; \pi(i+1)) > f(n; \pi(1)) \quad (14)$$

であることを証明する。

今、 $i=1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(1)) \\ &= f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(i)) \\ &+ f(n; \pi(i)) - f(n; \pi(i-1)) \\ &+ \dots \\ &+ f(n; \pi(3)) - f(n; \pi(2)) \\ &+ f(n; \pi(2)) - f(n; \pi(1)) \\ &= \sum_{j=1}^i (f(n; \pi(j+1)) - f(n; \pi(j))) \\ &= (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \sum_{j=1}^i g(j, n) + \sum_{j=1}^i S_j \end{aligned} \quad (15)$$

である。

$n=2m$ とすると補助定理 2 の 2) より

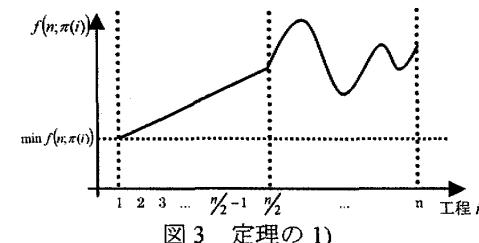


図 3 定理の 1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i g(j, n) &= \sum_{j=1}^{m-1} g(j, n) - \sum_{j=1}^{i-m} g(m-j, n) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} g(j, n) - \sum_{j=2m-i}^{m-1} g(j, n) \\ &= \sum_{j=1}^{2m-i-1} g(j, n) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

また、補助定理 2 の 1) より $i \geq \frac{n}{2}$ に対して $\sum_{j=1}^{2m-i-1} g(j, n) > 0$

なので、(15)式から

$$f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(1)) > 0 \quad (17)$$

が成立する。

次に、 $n=2m+1$ の時、補助定理 2 の 3) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i g(j, n) &= \sum_{j=1}^m g(j, n) + \sum_{j=1}^{i-m} g(j+m, n) \\ &= \sum_{j=1}^m g(j, n) - \sum_{j=1}^{i-m} g(m+1-j, n) \\ &= \sum_{j=1}^m g(j, n) - \sum_{j=2m-i+1}^m g(j, n) \\ &= \sum_{j=2m-i}^m g(j, n) \end{aligned} \quad (18)$$

であり、補助定理 2 より $i \geq \frac{n}{2}$ に対して $\sum_{j=2m-i}^m g(j, n) > 0$ の

で、(15)式から

$$f(n; \pi(i+1)) - f(n; \pi(1)) > 0 \quad (19)$$

が成立する。

よって(14)式が成立する。

(13)式および(14)式が成立することより定理の 1) が証明された。

2) の場合

この場合は、 $S_i \leq 0$ となる。また、補助定理 2 の 1) より

$i < \frac{n}{2}$ に対して $g(i, n) > 0$ となる。したがって、(12)式及び

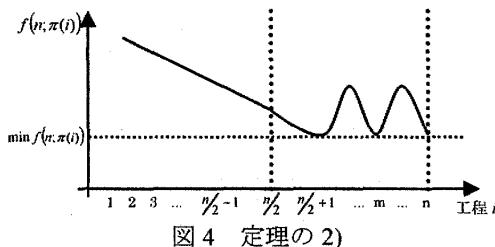


図4 定理の2)

$Q_B \geq Q_A$ であることから

$i < \frac{n}{2}$ に対して

$$f(n; \pi(i+1)) \leq f(n; \pi(i)) \quad (20)$$

となる。

(20)式は、最適解が $\left\{ \pi(i) \mid i < \frac{n}{2} \right\}$ には存在しないことを意味する（図4）。

以上のことより定理の2)が証明された。

ここで、 $l = A, B$ に対して $\frac{TL_l}{Q_l}$ は作業者 l が遅れるという

条件の下での遅れ時間の期待値 ($E[T_l - Z | T_l > Z]$) となることに注意されたい。

特に作業者の加工時間が指数分布に従う場合には次の系が得られる。

系

$l = A, B$ に対して作業者 l の加工時間の確率密度関数 $f_l(t)$ を

$$f_l(t) = \mu_l e^{-\mu_l t} \quad (21)$$

とする。ただし、 μ_l は作業者 l の加工率である。

このとき、

(1) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少で $\mu_A < \mu_B$ ならば、配置 $\pi(l)$ が

最適配置となる。

(2) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少で $\mu_A \geq \mu_B$ ならば、最適配置

$\pi(i)$ は $(i \geq \frac{n}{2})$ に存在する。

証明) 定理より明らかである。

定理の結果から、1)では $n-1$ 人の作業者に比して作業の遅い（加工時間が長い）1人の作業者は工程1に配置、2)では $n-1$ 人の作業者に比して作業の早い（加工時間が短

い）1人の作業者は全工程の後半に配置すべきであるということを示している。しかし、2)については、作業の早い作業者を全工程の後半のどの工程に配置するかは定理の結果からは判別できないので4章において実際の数値考査を用いながら後半工程のどの工程に配置すべきかを考察する。

4. 作業の早い作業者が1人居る場合

本章では、各作業者の加工時間を指數分布、すなわち、 $l = A, B$ に対して作業者 l の加工時間確率密度関数を $f_l(t) = \mu_l e^{-\mu_l t}$ と仮定する。ここで、 μ_l は作業者 l の加工率である。この時、 $l = A, B$ に対して

$$P_l = \int_0^Z f_l(t) dt = 1 - e^{-\mu_l Z} \quad (22)$$

$$Q_l = \int_Z^\infty f_l(t) dt = e^{-\mu_l Z} \quad (23)$$

$$TS_l = \int_0^Z (Z-t) f_l(t) dt = Z - \frac{1}{\mu_l} (1 - e^{-\mu_l Z}) \quad (24)$$

$$TL_l = \int_Z^\infty (t-Z) f_l(t) dt = \frac{1}{\mu_l} e^{-\mu_l Z} \quad (25)$$

と表される。ここで、期待費用 $f(n; \pi(i))$ の算出は山本他[7]の再帰方程式を用いる。

数値実験を行うため、パラメータは以下のように設定する。工程数 $n = 5 \sim 8$ 、連続遅れ費用を $C_p^{(1)} = 40$ 、 $C_p^{(2)} = 80$ 、 $C_p^{(3)} = 160$ 、 $C_p^{(4)} = 320$ 、 $C_p^{(5)} = 640$ 、 $C_p^{(6)} = 1280$ 、 $C_p^{(7)} = 2560$ 、 $C_p^{(8)} = 5120$ 、サイクル時間を $Z = 2$ 、そして遊休費用を $C_S = 20$ とする。

一般作業者 B の加工率を固定し、特殊作業者 A の加工率を変化させ、上記のパラメータ値を代入して数値実験を行なった。その結果を表1に示す。表1は、 $\mu_A > \mu_B$ なので、

$Q_B > Q_A$ かつ $\frac{TL_B}{Q_B} > \frac{TL_A}{Q_A}$ が成立し、定理の2)が適用される。

表1 定理の2)の数値例

A の加工率 (μ_A) 0.1 増分	B の加工率 (μ_B) 固定	5 工程 (n=5)	6 工程 (n=6)	7 工程 (n=7)	8 工程 (n=8)
0.2	0.1	BBBBB A	BBBBBA	BBBBBB A	BBBBBBB A
0.3	0.1	BBBBB A	BBBBBA	BBBBBB A B	BBBBBBB A B
0.4	0.1	BBBB A B	BBB A BB	BBB A BB	BBB A BBB
0.5	0.1	BBB A B	BBB A BB	BBB A BB	BBB A BBB
0.6	0.1	BB A BB	BBB A BB	BBB A BB	BBB A BBB
0.7	0.1	BB A BB	BBB A BB	BBB A BB	BBB A BBB

表1から特殊作業者Aの加工率が大きくなることにつれ、

この場合の最適配置が($i \geq \frac{n}{2}$)範囲内で $\pi(n)$ から $\pi(u)$ に向

かって単調に変化していくことがわかる。ただし、

$$u = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & (n \text{が偶数}) \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & (n \text{が奇数}) \end{cases}$$

である。これは加工率が大きな特殊作業者Aを中心に配置することにより連続して工程が遅れることを防ぐことができ、費用が低くなるためと考えられる。すなわち、配置を変えることによって、連続遅れがシステム全体に与える影響を最低限に抑え、費用が削減される。

5. おわりに

本論文では、リセット多期間制約サイクル問題モデルにおいて2種類の作業者が存在し、一方の種類の作業者が1人で、他方の作業者が $n-1$ 人の場合の最適配置法則(定理)のひとつの十分条件を数理的証明により導いた。その結果、

- (1) 作業の遅い作業者が1人居る場合、その作業者を工程1に配置すれば最適配置になる。また、
- (2) 作業の早い作業者が1人居る場合、その作業者を全工程の後半に配置すれば最適配置になる。

最後に、加工時間が指指数分布に従うと仮定した上で、数値例を通じて、定理の2)の条件において、具体的に全工程の後半のどの工程に配置すれば最適配置になるかについても考察した。その結果、この場合の最適配置は固定ではなく、単調に変化していくことがわかった。これで、最適配置を理論的に導き出すための第一歩を踏み出した。

今後の課題として、本論文では加工率が2種類、特殊作業者が1人居る場合の最適配置の1つの十分条件を導出したが、その必要十分条件の検討及び定理の2)の場合の未知部分の最適配置法則の考察がある。また、特殊作業者(本論文は1人居る場合)の人数、あるいは、作業者の加工率の種類(本論文は2種類の場合)を増やし、より複雑な工程条件の場合に対応できる定理の検討がある。そして、その結果を利用し最適なサイクル時間Zを決定することが挙げられる。

謝辞 :

本論文は日本学術振興会科学研究費補助(基礎研C, 2011年度-2013年度、課題番号: 23510161)の一環として進められたものである。ここに謝意を表す。

参考文献 :

- [1] Wight, Q. W.: Production and Inventory Management in the Computer Age, Canners Publishing Co. (1974)
- [2] 山本久志、松井正之、劉 軍：“多期間制約サイクル問題と最適配置に関する基礎的研究”，日本経営工学会論文誌、Vol. 57, No. 1, pp. 23-31 (2006)
- [3] Matsui, M.: A Management Cycle Model: Switching Control under Lot Processing and Time Span, J. Jpn. Ind. Manage. Assoc. Vol. 56, pp. 256-264 (2005)
- [4] Matsui, M.: Manufacturing and Service Enterprise with Risk: A Stochastic Management Approach, Springer (2008)
- [5] 渡部訓祥、孫 晶、松井正之、山本久志：“多期間制約サイクル問題における最適配置法則に関する考察－加工率が2種類の場合－”，日本経営工学会秋季大会予稿集, pp. 298-299 (2008)
- [6] 山本久志、孫晶、大石貴之、松井正之：“ノンリセット多期間制約サイクルモデルにおける最適切換問題に関する研究～基準工程により加工率を切換える場合～”，日本経営工学会論文誌、Vol. 61, No. 4, pp. 234-243 (2010)
- [7] 山本久志、松井正之、白 雪松：“分岐限定法を用いた多期間制約サイクルの最適配置算出アルゴリズム”，日本経営工学会論文誌、Vol. 58, No. 1, pp. 38-43 (2007)

付録：補助定理の証明

1. 補助定理1の証明

配置 $\pi(i)$ の時の工程 n で発生する期待費用 $f(n; \pi(i))$ は

$$f(n; \pi(i)) = C_S((n-1)TS_B + TS_A) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^l CF(l, \alpha; \pi(i)) \right) \quad (26)$$

となる。また、 $\alpha = 1, 2, \dots, l$ ($l = 1, 2, \dots, n$)に対して、 $CF(l, \alpha; \pi(i))$ は、配置 $\pi(i)$ の時、工程 $l-\alpha$ が遅れず、工程 $l-\alpha+1$ から工程 l までの α 工程が遅れた時の工程 l で発生する期待遅れ費用を表す(図5)。ここで、 α は遅れが連続して発生した工程数を意味する。

工程	$l-\alpha$	$l-\alpha+1$...	$i-1$	i	$i+1$...	$l-1$	l	
配置	$\pi(i)$	B	B	...	B	A	B	...	B	B
	○	●	...	●	●	●	...	●	◎	

α 工程

(○: 遊休; ●: 遅れ; ◎: 期待遅れ費用が発生する工程)

図5 $CF(l, \alpha; \pi(i))$ について

この時、

$l > \alpha$ の時は,

$$CF(l, \alpha; \pi(i)) = \begin{cases} C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (l < i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_A \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (l = i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (l > i+1, \alpha < l-1) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_A \cdot Q_B^{\alpha-1} & (l > i+1, \alpha = l-1) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_A \cdot Q_B^{\alpha-2} & (l > i+1, \alpha > l-1) \end{cases} \quad (27)$$

と表わせる。ただし、 $l = \alpha$ の時は、便宜上

$$CF(l, \alpha; \pi(i)) = \begin{cases} C_P^{(l)} \cdot TL_B \cdot Q_B^{l-1} & (l < i) \\ C_P^{(l)} \cdot TL_A \cdot Q_B^{l-1} & (l = i) \\ C_P^{(l)} \cdot TL_B \cdot Q_A \cdot Q_B^{l-2} & (l > i) \end{cases} \quad (28)$$

と定義する。

今、 $CF(l, \alpha; \pi(i+1)) - CF(l, \alpha; \pi(i))$ を考えると、この値は、費用が発生する工程 l 、連続して発生する工程数 α 及び特殊作業者の配置工程 i に応じて 0 となる。0 とならない場合を図 6 に示す。(図 6 は横に工程を表す。配置が $\pi(i+1)$ と $\pi(i)$ の場合において、○は遊休が発生した工程を、●は遅れが発生した工程を、◎は期待遅れ費用が発生する工程を表す。)

よって、

工程	$l-\alpha$	$l-\alpha+1$...	$i-1$	i	$i+1$		
$\pi(i)$	B	B	...	B	A	B		
$\pi(i+1)$	B	B	...	B	B	A		
① $l = i (l > \alpha)$	○	●	...	●	◎			
② $l = i (l = \alpha)$	●	●	...	●	◎			
工程	$l-\alpha$	$l-\alpha+1$...	$i-1$	i	$i+1$		
$\pi(i)$	B	B	...	B	A	B		
$\pi(i+1)$	B	B	...	B	B	A		
③ $l = i+1 (l > \alpha)$	○	●	...	●	●	◎		
④ $l = i+1 (l = \alpha)$	●	●	...	●	●	◎		
工程	1	$...$	i	$i+1$	$i+2$...	$i-1$	i
$\pi(i)$	B	...	A	B	B	...	B	B
$\pi(i+1)$	B	...	B	A	B	...	B	B
⑤ $l > i+1, \alpha = l-i$	○	●	●	...	●	◎		
工程	1	$...$	i	$i+1$	$i+2$...	$i-1$	i
$\pi(i)$	B	...	A	B	B	...	B	B
$\pi(i+1)$	B	...	B	A	B	...	B	B
⑥ $l > i+1, \alpha = l-i-1$	○	●	●	...	●	◎		

図 6 $f(n, \pi(i))$ と $f(n, \pi(i+1))$ において相殺されない場合

$$\begin{aligned} & f(n, \pi(i+1)) - f(n, \pi(i)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^i (CF(i, \alpha; \pi(i+1)) - CF(i, \alpha; \pi(i))) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{i+1} (CF(i+1, \alpha; \pi(i+1)) - CF(i+1, \alpha; \pi(i))) \\ &+ \sum_{l=i+2}^n (CF(l, l-i; \pi(i+1)) - CF(l, l-i; \pi(i))) \\ &+ \sum_{l=i+2}^n (CF(l, l-i-1; \pi(i+1)) - CF(l, l-i-1; \pi(i))) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ただし、(29)式の右辺の第 1 項は図 6 の①②、第 2 項は図 6 の③④、第 3 項は図 6 の⑤、第 4 項は図 6 の⑥に対応する。ここで、②④は $l = \alpha$ なので、工程 1 から工程 l まで連続遅れが発生する。そして、(29)式に(27)式と(28)式を代入すれば補助定理 1 は証明される。

(補助定理 1 の証明終了)

2. 補助定理 2 の証明

$$g(i, n) = \begin{cases} - \sum_{\alpha=n-i}^{i-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) & (i \geq \frac{n}{2}) \\ \sum_{\alpha=i}^{n-i-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) & (i < \frac{n}{2}) \end{cases} \quad (30)$$

であることより、1)は証明される。

$n = 2m$ とすると

$$\begin{aligned} g(j+m, 2m) &= - \sum_{\alpha=2m-j-m}^{j+m-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= - \sum_{\alpha=m-j}^{j+m-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= - \sum_{\alpha=m-j}^{2m-(m-j)-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= -g(m-j, 2m) \end{aligned} \quad (31)$$

また、(31)式に $j=0$ を代入すると $g(m, n)=0$ であることがわかる。よって、2)は証明される。

$n = 2m+1$ とすると、

$$\begin{aligned} g(j+m, 2m+1) &= - \sum_{\alpha=2m+1-j-m}^{j+m-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= - \sum_{\alpha=m+1-j}^{j+m-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= - \sum_{\alpha=m+1-j}^{2m+1-(m+1-j)-1} Q_B^{\alpha-1} (C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \\ &= -g(m+1-j, 2m+1) \end{aligned} \quad (32)$$

であることより、3)が証明される。

(補助定理 2 の証明終了)