J Jpn Ind Manage Assoc 63, 41-49, 2012

Original Paper

Optimal Demand and Release Lead Time in an M/D/1 Base Stock Production and Inventory System with Advance Demand Information

Shiori YOKOZAWA [†1] and Koichi NAKADE [†1]

Abstract

A production and inventory system under a base stock policy is considered with advance demand information. Demand arrival is informed in advance with a fixed time, called demand lead time. An arrival process of demand is Poisson, and processing time is assumed to be deterministic. The arrival rate of demand is assumed to be nonincreasing in the demand lead time. In this system, the optimal number of base stocks and optimal demand lead time are analyzed. In addition, for large demand lead time, a release lead time is introduced, in which case the order for processing is postponed after each arrival of advance demand information. The relationship between release lead time and demand lead time is also discussed.

Key words: base stock policy, advance demand information, release lead time, M/D/1

[†1] Nagoya Institute of Technology
Received: July 27, 2011
Accepted: March 13, 2012

原著論文

事前需要情報をもつM/D/1型基点生産在庫システムにおける最適需要リードタイムとリリースリードタイム

横澤 史織[†1], 中出 康一[†1]

需要の到着時刻に関する情報を事前に得ることができる生産・在庫システムを考える．生産・在庫システムは，事前需要情報を用いた発注基点在庫政策に従う．この事前需要情報の到着時刻から実際の需要の到着時刻までの時間は需要リードタイムと呼ばれる．本研究では，補充工程は工程時間が一定であるとする．事前重要情報がポアソン過程に従って到着し， 到着率が需要リードタイムに依存するとき，在庫費用や納期遅れに関する長時間期待利益が最大となる最適需要リードタイムを解析する．また，最適需要リードタイムが十分に長いときに早期発注による過剰な在庫を防ぐため，発注のタイミングを表すリリースリードタイムを導入し，最適リリースリードタイムを求め，最適需要リードタイムとの関係について議論する．

キーワード：発注基点在庫政策，事前需要情報，リリースリードタイム，M/D/1

1 序論

生産・在庫システムの解析は古くから多くなされている．近年，事前需要情報を用いた生産・在庫システムの解析がなされてきた．事前需要情報とは，需要が到着するより前に得られる，需要の実際の到着時刻に関する情報をもつ．例えば，ある部品を供給するサプライヤーが存在するとしよう．発注者である完成品メーカーが実際に部品が必要な時にサプライヤーに発注するのではなく，事前に需要情報をサプライヤーに提示することで，サプライヤーは適切に生産量を調整することができる．すなわち，需要の到着時刻についての情報を事前に得ることで，生産工程に情報を反映し，在庫費用や納期遅れを減少させることができる．このため，事前需要情報は生産・在庫システムの改良に重要な意味を持つ．事前需要情報の到着時刻から実際の需要の到着時刻までの時間を需要リードタイムと呼ぶ．

Hariharan and Zipkin[4]では，ポアソン過程に従って発注が到着し，連続観測の発注基点在庫補充政策を用いるサプライヤーのモデルについて議論されている．ここで，発注基点在庫政策とは，事前需要情報によって補充発注を行い，システム内の在庫位置は常に基点在庫量を保つ基点在庫政策である．Gallego and Ozer[3]では，可変で有限な需要リードタイムをもつ，外因性の補充による定期観測の一段階在庫システムについて議論されており，補充時間が需要リードタイムの最大値より大きいなら，発注基点在庫政策が最適であると示されている．Buzacott and Shanthikumar[1], [2]では，固定需要リードタイムをもち，連続審査発注基点在庫補充政策を用いる容量制約つき一段階生産在庫システムについて議論されており，最適需要リードタイムと費用は，発注基点在庫量の減少関数であることが示されている．

Liberopoulos[6]では，発注基点在庫政策に従う一段階生産・在庫システムでの事前需要情報の需要リードタイムと最適基点在庫量のトレードオフについて議論されている．費用を最小化する整数の最適基点在庫量を示し，需要リードタイムの増加によって最適基点在庫量が減少することが示されている．また，補充工程がM/D/1，M/M/1，M/D/∞待ち行列で表されるそれぞれの場合について，このトレードオフの詳細が議論されている．

[6]では，到着率が需要リードタイムの変化にかかわらず一定であると仮定して，十分に長い需要リードタイムが費用を最小化する最適な需要リードタイムとされている．しかし，需要リードタイムは容易に長くできるものではない．需要リードタイムが長い場合，発注者は需要情報を与えてから，製品を受け取るまでの時間が長くなる．長く待てない場合，発注者は，より需要リードタイムが短い供給者を選択するため，需要リードタイムが長い供給者への発注は減少していくと考えられる．このとき，需要リードタイムの増加によって，在庫費用は削減できるが収入も減少する．製造業の利益における重要な要因となる在庫費用と収入のトレードオフが生じる．つまり，在庫費用と収入のトレードオフから，最適

[†1] 名古屋工業大学
受付：2011年7月27日，再受付（2回）
受理：2012年3月13日

な需要リードタイムを求めることができる．そこで，本論文では需要リードタイムの増加とともに到着率が減少すると仮定し，利益を最大化する最適な需要リードタイムを導出する．

Hiraiwa and Nakade[5]では，需要の到着率が需要リードタイムの増加に関して減少関数であるとし，M/M/1型生産システムにおいて，事前需要情報を用いた発注基点在庫政策に従う一段階の生産・在庫システムでの総期待利益を最大化する基点在庫量とリリースリードタイムを理論的に導出している．ここでリリースリードタイムとは，事前需要情報の到着時に直ちに発注を行わずに一定時間後に発注すると仮定したときの，発注時刻から対応する需要の到着時刻までの時間である．しかし，[5]での基点在庫量は，整数値ではなく，非負の実数値を仮定している．実際には基点在庫量は整数値により定められる．また，生産工程は通常一定の処理時間をとることが多く，加工時間が指数分布ではなく一定の値をとることが現実的である．

本研究では，事前需要情報を用いた発注基点在庫政策に従い，補充工程がM/D/1待ち行列で表される一段階の生産・在庫システムを考える．[6]で示されたモデルをもとにしながら，到着率は需要リードタイムの増加に関して減少関数であると拡張し，期待利益を最大化する最適需要リードタイムを導出する．さらに，需要リードタイムが十分に長い場合について，リリースリードタイムを考慮する．特に本論文では，リリースリードタイムと需要リードタイムとの関係について考察する．

本論文の構成は以下の通りである．２章では本論文で扱う生産・在庫システムについて述べる．３章では到着率を仮に一定としたときの最適基点在庫量と最適需要リードタイムについて述べる．その際，[6]で示された結果のうち本論文に特に関係する事項について補足する．４章では，到着率が需要リードタイムについて減少関数であるときの最適需要リードタイムと最適基点在庫量を示す．５章では，リリースリードタイムを導入し，最適リリースリードタイムと需要リードタイムの関係について議論する．６章では数値例により最適在庫量，最適需要リードタイム，リリースリードタイムの性質を述べる．７章では結論を述べる．

2　生産・在庫システムの定式化

連続時間上の単一品種・単一工程の生産・在庫モデルを考える．事前需要情報がポアソン到着過程に従って到着し，T 期間後に一つの製品を要求する．この期間 T を需要リードタイムと呼ぶ．事前需要情報の到着率は需要リードタイムの大きさに依存して決まり，$\lambda(T)$ と表す．$\lambda(T)$ は，T に関して減少する連続関数であるとする．発注は発注基点在庫政策に従い，事前需要情報の到着時に，補充工程に補充発注を行う．すなわち，補充工程で生産待ちならびに生産中の仕掛品数と完成品数の和から待機中の需要情報，発注残を引いた数は常に一定の基点在庫量となる．基点在庫量を S とし，非負の整数値をとると仮定する．

工程時間は一定時間 ℓ であるとする．このとき，この補充工程は，M/D/1 待ち行列でモデル化される．到着率は $0<\lambda(T)<1/\ell$ を満たすとする．図 1 にこのモデルを示す．

製品が完成すると，完成品在庫へ入れられ，製品が引き取られるまで在庫費用がかかる．また，製品が要求される時刻に，在庫に利用可能な製品がない場合，発注残となり，バックログ費用がかかる．単位時間・一製品当たりの在庫費用を h，バックログ費用を b とする．一製品当たりの収益を p とする．各工程は先着順に処理されると仮定する．

記号を以下のように定義する．

A_n，$n=0,1,2,\cdots$：n番目の事前需要情報の到着時刻

H_n，$n=1,2,3,\cdots$：$n-1$番目とn番目の事前需要情報の到着時間間隔

W_n，$n=0,1,2,\cdots$：n番目の発注の補充工程時間

E_n，$n=0,1,2,\cdots$：最初の発注による補充時間W_0と，n番目の事前需要情報の到着時刻 A_n の差

ここで，以下の式が成り立つ．

$$A_0=0,\ A_n=A_{n-1}+H_n=\textstyle\sum_{i=1}^{n}H_i,\quad n=1,2,\cdots.$$

$$E_n=W_0-A_n=E_{n-1}-H_n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

ここで，E_{n-1} と H_n は互いに独立であることに注意する．

W_n の極限分布に従う確率変数を W とする．長期

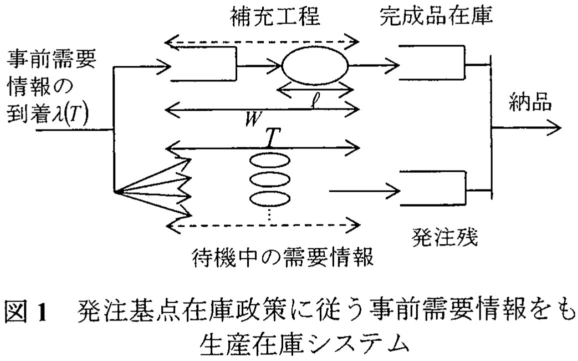

図 1　発注基点在庫政策に従う事前需要情報をもつ生産在庫システム

期待利益を求めるために，システムが定常状態にあると仮定する．このとき，W_n は同一分布 $P(W \le x)$ に従う．

$W_0 - A_1 \ge 0$ のとき，$E_1 = W_0 - A_1$ は 1 番目の発注の補充工程での待ち時間となり，$E_1 + \ell = W_1$ である．定常状態において，非負の x に対し，

$$P(E_1 > x) = P(W > x + \ell) = P(E_0 > x + \ell)$$

となる．H_n の累積分布は，n に依らず同じ分布をとる．上式より以下を満たす．

$$\begin{aligned} P(E_2 > x) &= P(E_1 - H_2 > x) = P(E_0 - H_1 > x + \ell) \\ &= P(E_1 > x + \ell), \quad x \ge 0. \end{aligned}$$

これを繰り返すと，以下の関係式が導ける．

$$P(E_n > x) = P(E_0 > x + n\ell),\ x \ge 0,\ n = 0,1,2\cdots,N. \quad (1)$$

需要リードタイムが T，基点在庫量（非負整数値）が S のときの長期期待利益を $R(T,S)$ とする．長期期待利益は以下の式で得られる．

$$\begin{aligned} &R(T,S) \\ &= \lambda(T)p - \lambda(T)E[h \max(T - E_S, 0) + b \max(E_S - T, 0)] \\ &= \lambda(T)p - \lambda(T)(h+b)\int_T^{\infty} P(E_S > x)dx + \lambda(T)hE[E_S] - \lambda(T)hT. \end{aligned} \quad (2)$$

3　到着率が一定であるときの最適基点在庫量と最適需要リードタイム

この章では，Liberopoulos [6]でのモデルとその結果について説明する．[6]では，発注基点在庫政策に従う一段階生産・在庫システムについて考えられている．到着率が需要リードタイムに依存せず，需要リードタイムを変動させても，到着率がある一定の値をとる点で本論文のモデルと異なっている．需要リードタイムと最適基点在庫量の間にトレードオフの関係が成り立ち，長期期待費用を最小化する整数の最適基点在庫量を示し，需要リードタイムの増加

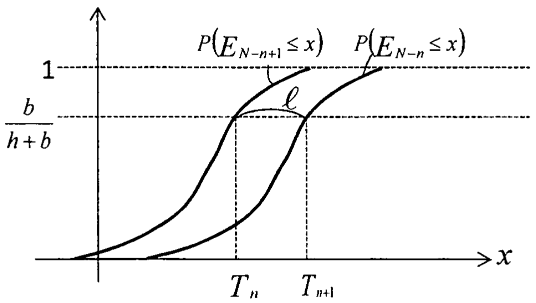

図 2　E_n の累積分布関数と T_n の関係

によって最適基点在庫量が減少することが示されている．その過程で導出されている定理を本論文で利用するため，[6]で示されている結果を述べる．

この章では到着率は一定の値 λ とする．需要リードタイム T が与えられたときの最適基点在庫量 $S^*(T)$ と，需要リードタイムに関する最適基点在庫量の変動について以下のように示されている．

最適基点在庫量 $S^*(T)$ は，

$$S^*(T) = \arg\min_{S:\mathrm{int}} \left\{ P(E_{S+1} \le T) \ge \frac{b}{h+b} \right\}$$

を満たす．$S^*(T)$ の値は需要リードタイム T の増加とともに，一定・減少を繰り返す．$N = S^*(0)$ とすると，$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N$ かつ $S^*(T) = N - n$ $(T_n \le T \le T_{n+1}, n = 0,1,\cdots,N)$，$S^*(T) = 0$ $(T \ge T_N)$ となる列 $\{T_0, T_1, \cdots, T_N\}$ が存在する．図2に E_n の累積分布関数と T_n の関係を示す．図2に示されるように，需要リードタイムの区切り T_n は，

$$P(E_{N-n+1} \le T_n) = \frac{b}{h+b}, \qquad n = 1,2\cdots,N$$

を満たす．また，到着率が一定のとき，長期期待費用を最小化する需要リードタイムを T_{N+1} とすると，

$$T_{N+1} = \arg\min_T \left\{ P(E_0 \le T) = P(W_0 \le T) \ge \frac{b}{h+b} \right\} \quad (3)$$

となる．$T_N < T_{N+1}$，$S^*(T_{N+1}) = 0$ である．つまり，需要リードタイムの区切り T_N より大きい T_{N+1} で，長期期待費用は最小化され，そのときの最適基点在庫量は0である．

$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n$ $(n = 1,2\cdots,N)$ とするとき，

$$\Delta T_n = \ell, \qquad n = 1,2\cdots,N \quad (4)$$

となる．これは，需要リードタイムの区切り T_n と T_{n+1} の差が，n に依らず一定であり，補充工程の工程時間と等しいことを表している．つまり，需要リードタイムを ℓ 追加するごとに，最適基点在庫量を1単位減らすことができる．図3に，[6]で示されている，需要リードタイムと最適基点在庫量の関係及び最適

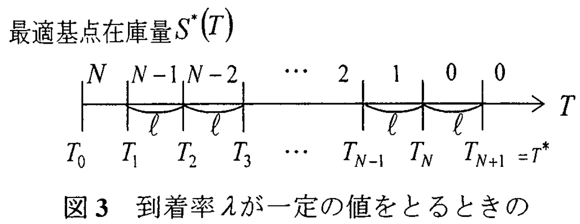

図 3　到着率 λ が一定の値をとるときの需要リードタイムと最適基点在庫量の関係

需要リードタイムを示す．

4　最適基点在庫量と最適需要リードタイム

以下では，到着率が需要リードタイムに依存する場合に戻る．

需要リードタイム$T=0$，到着率$\lambda(0)$のときの，最適基点在庫量を$S^*(0)=N$とする．到着率が仮に$\lambda\le\lambda(0)$で一定であるとき，最適基点在庫量が$N-n+1$から$N-n$となる需要リードタイムの区切りを$T_n(\lambda)$，$n=1,2,\cdots N$とし，(3)と同様に$T_{N+1}(\lambda)$を定義する．

W_n，E_nについて，到着率との関係を表すために上添字λを加える．2章と同様，定常状態で，W_n^λは同一分布$P(W^\lambda\le x)$に従う．

到着率をλから$\lambda+\Delta\lambda$まで増加させたとき$(\Delta\lambda>0)$，$W_n^{\lambda+\Delta\lambda}$は$W_n^\lambda$より確率的に大きくなる(例えばStoyan and Daley[7], p.82)．従って，$E_n^{\lambda+\Delta\lambda}$は確率的に$E_n^\lambda$より大きいので，

$$P(E_n^\lambda\le x)\ge P(E_n^{\lambda+\Delta\lambda}\le x),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

となる．

(4)式より，到着率が一定の値λ $(\lambda\ge h/\{\ell(h+b)\})$のとき，需要リードタイムの区切りの間隔はすべて$\Delta T_n=\ell$，$n=1,2,\cdots N$であるので，$T_{N+1}(\lambda)$が求まれば，他の関数$T_n(\lambda)$ $(n=1,2,\cdots N)$がすべて導出できる．

$T_{N+1}(\lambda)$について考える．W_0^λはM/D/1待ち行列における定常状態のときの滞在時間を表しており，$T<\ell$のとき$P(W_0^\lambda\le T)=0$，$T\ge\ell$のとき$P(W_0^\lambda\le T)\ge 1-\rho$ $(\rho=\lambda\ell)$となり，$T\ge\ell$ではW_0^λの累積分布関数は連続である．

このことから，$1-\rho\le b/(h+b)$，すなわち$\lambda\ge h/\{\ell(h+b)\}$のとき，(3)より，

$$P(E_0\le T_{N+1}(\lambda))=P(W_0\le T_{N+1}(\lambda))=\frac{b}{h+b},\ T_{N+1}(\lambda)\ge\ell \tag{6}$$

となり，$1-\rho>b/(h+b)$，すなわち$\lambda<h/\{\ell(h+b)\}$のとき，(3)より，

$$T_{N+1}(\lambda)=\ell,\ P(E_0^\lambda\le T_{N+1}(\lambda))=P(W_0^\lambda\le T_{N+1}(\lambda))>\frac{b}{h+b}$$

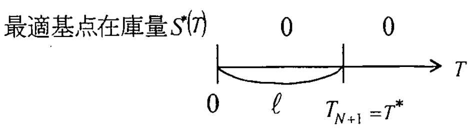

図4　到着率λ $(0<\lambda<h/\{\ell(h+b)\})$が一定の値をとるときの最適基点在庫量と最適需要リードタイム

となる．

(5)より，到着率をλから$\Delta\lambda$増加させたとき，

$$P(E_0^{\lambda+\Delta\lambda}\le T_{N+1}(\lambda))\le P(E_0^\lambda\le T_{N+1}(\lambda))=\frac{b}{h+b}$$

となり，到着率λが増加したとき，需要リードタイムの区切り$T_{N+1}(\lambda)$も増加していくことがわかる．

到着率が$0<\lambda<h/\{\ell(h+b)\}$のとき，$T=T_{N+1}=\ell$は長期期待利益を最大化する最適需要リードタイムである．また，(1)より，すべての需要リードタイムに対して$(T\ge 0)$，最適基点在庫量は$S^*(T)=0$となる．図4に，到着率λ $(0<\lambda<h/\{\ell(h+b)\})$が一定の値をとるときの，最適基点在庫量と最適需要リードタイムを示す．

3章と上記の議論から，$T_{N+1}(\lambda)$とTの差により，到着率λと需要リードタイムTが与えられたときの最適基点在庫量$S^*(\lambda,T)$が定まる．すなわち，

$$S^*(\lambda,T)=\begin{cases} s & s\ell<T_{N+1}(\lambda)-T\le(s+1)\ell \quad s=1,2,\cdots\\ 0 & T_{N+1}(\lambda)-T\le\ell\end{cases}$$

となる．

λ, Tと$S^*(\lambda,T)$の関係は図5のようになる．3章より，最適基点在庫量が$N-n+1$から$N-n$へと一つ減る境目を表す関数$T_n(\lambda)$ ($n=1,2,\cdots N+1$)はT軸方向に間隔ℓで並んでいる．到着率λでの最適需要リードタイムを表す関数$T_{N+1}(\lambda)$は，到着率が$h/\{\ell(h+b)\}$より小さいところでは，ℓで一定となっている．その他の関数$T_n(\lambda)$ $(n=1,2,\cdots N)$は全て，$T_n(\lambda)=0$となる到着率λが$h/\{\ell(h+b)\}$より大きい値となるような関数となる．図5の左上にある関数$T_1(\lambda)$より上の部分では最適基点在庫量がNであり，右下に向かって関数を超えていくごとに最適基点在庫量が1単位ずつ減っていく．

図5の矢印のように，到着率関数$\lambda(T)$が与えられ

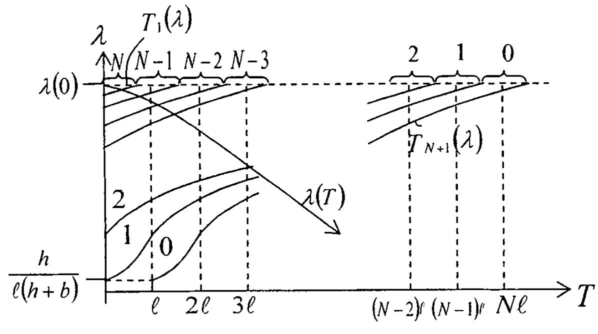

図5　到着率λと需要リードタイムTに関する最適基点在庫量$S^*(\lambda,T)$の関係

ているとすると，関数$T_n(\lambda)$，$(n=1,2,\cdots N)$と交わるところで最適基点在庫量が1単位ずつ減り，$T_{N+1}(\lambda)$と交わるところでは，すでに最適基点在庫量が0であるため，これ以上減らすことができず，最適基点在庫量が0のままとなる．

$\lambda(T)$によって需要リードタイムから到着率が決まると，最適基点在庫量$S^*(T)=S^*(\lambda(T),T)$が定まる．

Tが与えられ，最適基点在庫量$S^*(T)$を用いたときの長期期待利益を$R^*(T)=R(T,S^*(T))$とする．長期期待利益$R^*(T)$は，最適基点在庫量$S^*(T)$を用いて求められる．(1)より，

$$\int_T^\infty P\left(E_{S^*(T)}^{\lambda(T)}>x\right)dx=\int_T^\infty P\left(E_0^{\lambda(T)}>x+S^*(T)\ell\right)dx$$
$$=E\left[W_0^{\lambda(T)}\right]-\int_0^{T+S^*(T)\ell}P\left(W_0^{\lambda(T)}>x\right)dx.$$

となる．ここで，$\rho(T)=\lambda(T)\ell$と置くと，(2)より，

$$R^*(T)=\lambda(T)p+\lambda(T)(h+b)\int_0^{T+S^*(T)\ell}P\left(W_0^{\lambda(T)}>x\right)dx$$
$$-b\frac{\rho(T)(2-\rho(T))}{2(1-\rho(T))}-hS^*(T)-h\lambda(T)T$$

となる．この長期期待利益を最大化するTが最適需要リードタイムである．

需要リードタイムが与えられると，到着率関数$\lambda(T)$によって到着率が決まり，最適基点在庫量は$S^*(T)$として求めることができる．そして，長期期待利益は$R^*(T)$で求められる．この長期期待利益を最大化する需要リードタイムが最適需要リードタイムとなる．

5 リリースリードタイムの導入

到着率λに対し需要リードタイムが$T_{N+1}(\lambda)$より大きいとき，つまり，図5において関数$T_{N+1}(\lambda)$との交点を超えてさらに大きい需要リードタイムをとるとき，長期期待利益は減少していく．これは，早くに情報が得られるために，補充発注のタイミングが早く，在庫費用が多くかかるためである．需要の情報が得られても，すぐに発注せず，しばらく待ってから適切な時刻に発注することが可能である．そこで，リリースリードタイムを導入する．事前需要情報が到着したあと，製品が要求される時刻よりL期前に，補充工程に補充発注を行うとする．この期間Lをリリースリードタイムと呼ぶ．LはTより小さい値をとるとする．図6にこのモデルを示す．また，図7に需要情報の到着と発注のタイミングの関係について図示する．実際に需要が到着する時刻よりT期前に事前需要情報が到着し，L期前に補充発注が行われる．つまり，事前需要情報が到着してから，$T-L$期間だけ発注はされず，$T-L$期間経過後補充工程に発注がなされ，需要情報はさらにL期間待って完成品を要求することになる．到着率$\lambda(T)$はこれまでと同様に需要リードタイムの大きさに依存して定まる．$T_{N+1}(\lambda(T))$より大きい値を取る場合について考えているため，最適基点在庫量$S^*(T)$は0である．長期期待利益は，リリースリードタイムLによって決まり，需要リードタイムをリリースリードタイムに置き換えることで得られる．

以下，$T\geq T_{N+1}(\lambda)$を満たす組(λ,T)のもとでλを一定としたときの最適リリースリードタイムを求める．需要リードタイムがT，基点在庫量がS，リリースリードタイムがLの長期期待利益を$\tilde{R}(T,S,L)$とおく．$T\geq T_{N+1}(\lambda)$のとき$S^*(T)$は0であることから，(2)と同様にして

$$\tilde{R}(T,S^*(T),L)=\lambda p-\lambda(h+b)\int_L^\infty P\left(W_0^\lambda>x\right)dx+\lambda hE\left[W_0^\lambda\right]-\lambda hL$$

を得る．上記の長期期待利益をLで偏微分する．

$$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}=\lambda(h+b)P\left(W_0^\lambda>L\right)-\lambda h.$$

$\lambda\geq h/\{\ell(h+b)\}$の場合，(6)より

$$\lambda(h+b)P\left(W_0^\lambda>T_{N+1}(\lambda)\right)-\lambda h=0$$

となり，$L<T_{N+1}(\lambda)$のとき$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}>0$，

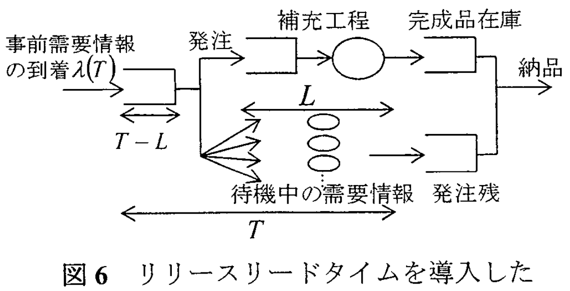

図6 リリースリードタイムを導入した生産在庫システム

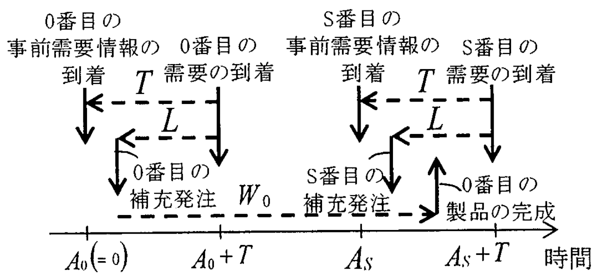

図7 需要情報の到着と発注のタイミングの関係

$L=T_{N+1}(\lambda)$のとき$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}=0$，$L>T_{N+1}(\lambda)$のとき$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}<0$である．

また，$0<\lambda<h/\{\ell(h+b)\}$の場合，$L<T_{N+1}(\lambda)=\ell$のとき$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}=\lambda b>0$，$L\geq\ell$のとき$\frac{\partial\tilde{R}(T,S^*(T),L)}{\partial L}=\lambda(h+b)P(E_0^\lambda>L)-\lambda h\leq 0$である．

以上より，最適リリースリードタイムは$L^*=T_{N+1}(\lambda)$となり，長期期待利益は最適需要リードタイム$T_{N+1}(\lambda)$での長期期待利益と等しい．

到着率が需要リードタイムにより変化する場合に戻る．図8に最適リリースリードタイムと長期期待利益のとる値を示す．図8のように到着率関数$\lambda(T)$が得られたとする．需要リードタイムが十分に長く$\lambda(T)$が関数$T_{N+1}(\lambda)$の線を超えたとき，すなわち需要リードタイム$\hat{T}$が$T>T_{N+1}(\lambda(T))$を満たすとすると，関数$T_{N+1}(\lambda)$上の到着率が同じである点，つまり$T_{N+1}(\lambda(\hat{T}))$が最適リリースリードタイムとなり，長期期待利益はこの点の長期期待利益と一致する．

このことから，到着率関数$\lambda(T)$のもとでリリースリードタイムを導入することで期待利益をより大きくするときには，$T=T_{N+1}(\lambda)$上(ただし図8において$\lambda=\lambda(T)$と$T=T_{N+1}(\lambda)$が交わる点より左下側)で利益を最大にする$T(T''$とする)を求め，最適リリースリードタイムを$L^*=T''$，最適需要リードタイムを$T''=T_{N+1}(\lambda(T))$を満たすTとすればよいことがわかる．

需要リードタイムが十分に長い場合，リリースリードタイムを用いて発注を遅らせ，早く完成してしまうために被る在庫費用を減らすことができる．利益を最大化する最適リリースリードタイムは$T_{N+1}(\lambda)$によって求められる．

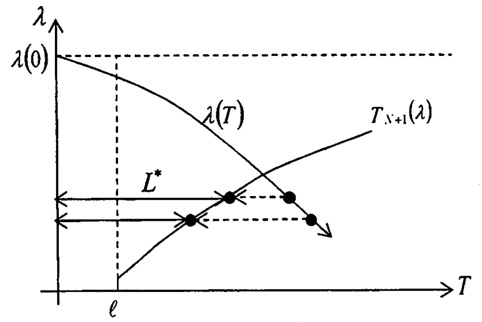

図 8　到着率λと需要リードタイムTに関する最適基点在庫量の関係

6 数値実験

4,5章で導出した長期期待利益関数がどのような変動をし，どのように最適需要リードタイムが得られるのかを考察するために数値実験を行う．また，到着率関数の変動の仕方によって，最適需要リードタイムがどのように異なるかについても考察する．

図8において需要リードタイムが$T_{N+1}(\lambda)$より大きい部分，つまり，関数$\lambda(T)$の線が関数$T_{N+1}(\lambda)$より下側にあるような需要リードタイムTに対しては，5章で述べたように，早く情報が得られることから，すぐに発注し在庫としてもつよりも，しばらく待ってから発注したほうが必ず良い長期期待利益を得られるので，最適リリースリードタイムを用いる．定常状態の補充工程時間W_nの確率分布は逆ラプラス変換による近似値によって算出する (Tijms [8])．ここで，パラメータを次のように与える．

$\ell=1$，$p=20$，$h=1$，$b=9$．

到着率関数を次のように与える．

$$\lambda(T)=-\frac{T}{a}+\frac{0.95}{\ell},\qquad a=2,5,10,15,20,25,50.$$

このとき$S^*(0)=N=23$となる．

各到着率関数における最適需要リードタイムを図9に示す．図9において，黒い点はそれぞれの到着率関数のもとで期待利益が最大となる点を表している．$a=10$のときの需要リードタイムに関する利益の変動を図10に示す．

到着率関数によって，最適需要リードタイムが大きく異なることがわかる．到着率関数が急であるほど，最適需要リードタイムT^*は小さい．一方，到着率$\lambda(T^*)$は，あまり変わらない．これは，需要リードタイムによる利益の変動への影響より，到着率による利益の変動への影響のほうが大きいためであると考えられる．

また，図10が示すように各到着率関数上での利益

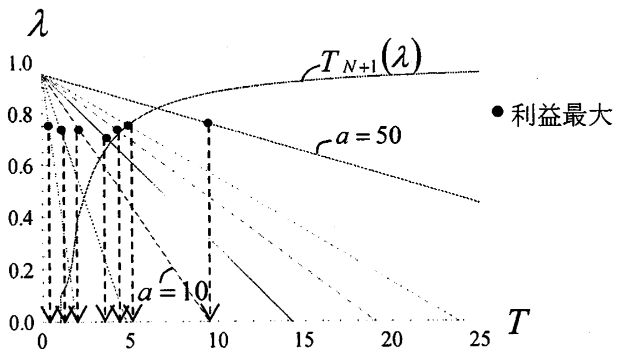

図 9　到着率関数と最適需要リードタイム

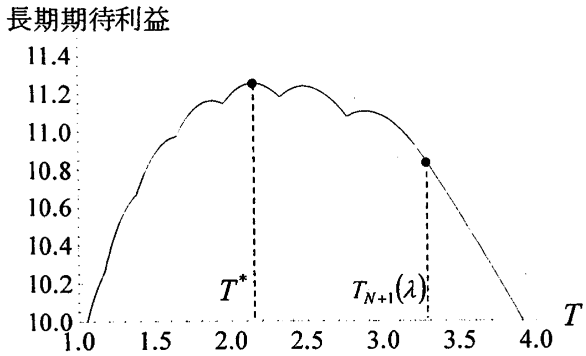

図 10　$a = 10$ での長期期待利益の変動

の変動についてみると，いくつかの山ができている．隣り合う２つの山の境目（谷の部分）は，最適基点在庫量が変化する点と一致している．

図9において，$a = 50$ のとき，最適需要リードタイム T^* が $T_{N+1}(\lambda)$ と交差する T より大きく，到着率 $\lambda(T^*)$ と長期期待利益 $R^*(T^*)$ は，$T_{N+1}(\lambda)$ 上で利益が最大となる点と一致している．これは，リリースリードタイムを導入し，$L^* = T_{N+1}(\lambda(T^*))$ としているためである．従って，到着率関数が緩やかでリリースリードタイムを導入することが最適となるとき，到着率 $\lambda(T^*)$ と長期期待利益 $R^*(T^*)$，最適リリースリードタイムは到着率関数によらずそれぞれ一定の値になるといえる．

最適基点在庫量は $a = 2,5,10,15,20,25,50$ の順に4,3,2,0,0,0,0となる．最適基点在庫量 $S^*(T^*)$ は，到着率関数が急であるほど大きい．これは，最適需要リードタイム T^* が小さいことと，図9に示すように，利益を得るためにある程度の到着率を確保する必要があることから結果として在庫を多く持つ必要があるためであると考えられる．

長期期待利益関数は，最適基点在庫量の変動に伴って，複数の山をもつ形状となり，この関数を求めたうえで，この利益を最大化する最適需要リードタイムを決めることができる．到着率関数の変動の仕方によって，最適需要リードタイムは大きく異なるが，ある程度の到着率を保つような需要リードタイムが最適需要リードタイムとして選ばれる傾向があることがわかる．到着率関数の減少の仕方が非常に緩やかである場合に，リリースリードタイムの導入によって，$T_{N+1}(\lambda)$ の関数を超えた大きな需要リードタイムよって利益が最大化されている．

7 結　　論

事前需要情報を用いた発注基点在庫政策に従い，補充工程がM/D/1待ち行列としてモデル化される一段階の生産・在庫システムを考察し，到着率が需要リードタイムに関して減少関数であるとき，利益が最大となる最適基点在庫量，最適需要リードタイムを解析した．需要リードタイムの増加に伴い最適基点在庫量は1単位ずつ減少することを示すとともに，M/D/1待ち行列の滞在時間分布を用いて，最適需要リードタイムを導出できることがわかった．また，最適需要リードタイムは，到着率の関数によって大きく異なることがわかった．

さらに，リリースリードタイムを導入することで，過剰な在庫による費用の増加を防ぐことができ，到着率の関数によっては，リリースリードタイムを用いることがより多くの利益をもたらす場合もあることがわかった．そのときの最適リリースリードタイムと需要リードタイムの関係を調べ，グラフなどによりその関係を示した．今後の課題として，M／D型以外のシステムの解析や，基点在庫システム以外における事前需要情報やリリースリードタイムの導入とその解析が挙げられる．

謝辞

改訂に当たり適切なコメントをいただいた査読者の方々に深謝いたします．

本研究は日本学術振興会科学研究費基盤研究(C)22510145による助成を受けています．

参 考 文 献

[1] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G. : Stochastic Models of Manufacturing Systems, Prentice-Hall, NJ, pp.135-145 (1993)

[2] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G. : "Safety Stock Versus Safety Time in MRP Controlled Production Systems," *Manage. Sci.*, Vol. 40, No. 12, pp. 1678-1689 (1994)

[3] Gallego, G. and Ozer, O. : "Integrating Replenishment Decisions with Advance Demand Information," *Manage. Sci.*, Vol .47, No. 10, pp. 1344-1360 (2001)

[4] Hariharan, R. and Zipkin, P. : "Customer-Order Information, Leadtimes and Inventories," *Manage. Sci.*, Vol. 41, No. 10, pp. 1599-1607 (1995)

[5] Hiraiwa, M. and Nakade, K. : "Analysis of Single Stage Production/Inventory System with Advance Demand Information," 日本経営工学会論文誌, Vol. 59, No. 6, pp.477-486 (2009)

[6] Liberopoulos, G. : "On the Tradeoff between Optimal Order-base-stock Levels and Demand Lead-times," *Eur. J. of Oper. Res.*, Vol. 190, No. 1, pp. 136-155 (2008)

[7] Stoyan, D. and Daley, D. J. : "Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models," John Wiley & Sons (1983)

[8] Tijms, H. C. : A First Course in Stochastic Models, Wiley (2003)