

Optimal Assignment with Two or Three Special Workers in a Reset Limited-cycle Problem with Multiple Periods

Xianda KONG,^{†1} Hisashi YAMAMOTO,^{†1} Jing SUN^{†2} and Masayuki MATSUI^{†3}

Abstract

The classical assignment problem has been widely applied in span manufacturing, personnel scheduling and transportation, to name just a few areas. Generally, the problem seeks to minimize the cost of assigning a given set of jobs (tasks) to a group of machines (worker). Computationally, the assignment problem is considered “easy” because it can be solved in polynomial time using several efficient algorithms. In this paper, we use a limited-cycle model with multiple periods where the risk itself is also affected greatly by the risks which existed in the earlier periods, and we focus on the property of the optimal assignment with minimized total expected risk (cost) in the limited-cycle model. First, the reset model, a simple model of the limited-cycle model, is presented. Then, the optimal assignment problem under the reset model is defined. After that, the property of the optimal assignment with two special workers is proposed. Finally, the property is proved using a mathematical approach and investigated via numerical experiments with a program in which an algorithm based on the branch and bound method is used.

Key words: limited-cycle problem, multiple periods, optimal assignment, manufacturing line, production seat system

^{†1}Tokyo Metropolitan University

^{†2}Nagoya Institute of Technology

^{†3}Kanagawa University

Received: May 28, 2012

Accepted: January 10, 2013

リセット多期間制約サイクル問題における2人及び3人の特殊作業者を有する最適配置法則

孔憲達^{†1}, 山本久志^{†1}, 孫晶^{†2}, 松井正之^{†3}

本研究では、直列型生産ラインを例として考える場合、ある工程（期間）が納期（制約）を満足するかどうかは前工程（前の期間）の状態に依存する多期間制約サイクルモデルを用いて期待費用を最小になるような最適配置を考えるだけでなく、ある条件下で、最適になる配置の規則性を提案することを目的とする。最初に、リセット多期間制約サイクルモデルの下で、最適配置を理論的に導き出すための一歩として、作業者が2種類居る場合に着目し、特殊作業者が2人居る場合の最適配置法則（定理）を提案する。次に、最適配置が一意に決定できない場合があるため、加工時間を指数分布と仮定した場合について、数値実験により最適配置を導出する。

キーワード：多期間制約サイクル問題、最適配置法則、生産ライン、生産座席予約問題

1 はじめに

次世代生産システムの設計には生産する品種や数量の変動、生産ピッチの変化や短い納期の注文に対応しつつ、作業順序、作業への設備や作業者等資源の割り当て、資源配置計画、製造費用の削減等の計画が不可欠である。

生産ラインの各作業ステーションに割り付ける作業量を均等化する方法としてラインバランシング問題[1]が1977年に提唱された後、様々な問題に派生している。待ち行列[2]、遺伝的アルゴリズム[3]を用いて設備機械数や作業者数の最適化、製品のグループ化と資源割り当て計画手法が提案されてきた。

作業者（設備）の数が最適化されても、作業者の作業能力にばらつきが存在する。作業者配置の最適化はこの課題に対する有意のアプローチである。これまでに、最適配置問題に関する多くの解法が発表されてきた[3][4]。しかしながら、提案された解法の多くは計算機を使用し相当量の計算を行わなければならない。

本研究では、直列型生産ラインを例として考える場合、ある工程（期間）が納期（制約）を満足するかどうかは前工程（前の期間）の状態に依存する多期間制約サイクルモデル[5][6]を用いて期待費用を最小になるような最適配置を考えるだけでなく、ある条件下で、最適になる配置の規則性を提案する。

多期間制約サイクル問題においては、各工程において加工が遅れた場合にその影響が後工程に依存しない、または当該工程で人員増強等により後工程に影響させないと仮定している（本論文ではリセットモデルと呼ぶ）[7]。しかし、各工程において加工が遅れた場合にその影響が後工程に直接影響があることも考えられる（本論文ではノンリセットモデルと呼ぶ）[8]。

山本他[5][9]では、リセットモデルの下で、各工程に各作業者をどのように配置すれば最も効率的、経済的かという問題（最適配置問題）を定義し、最適配置問題を評価する期待費用の定式化と効率的に算出するアルゴリズムを提案した。また、システムの最小期待費用をもたらす n 人の処理速度がすべて異なる場合の最適配置の規則性について数値的に考察した。その後、山本他[6]では、最適配置法則を理論的に導き出すため、その最初の段階として、リセットモデルにおいて処理速度が異なる2種類の作業者が存在し、一方の種類（特殊作業者）の作業者が1人で、もう一方の種類（作業者が $n-1$ 人の場合の最適配置問題）を考え、ある配置が最適配置となる条件を解析的に導出した。本論文は、熟練の職人と新米弟子が居るパン工場のような生産現場[10]を考慮しながら、引き続き作業者が2種類存在し、特殊な作業者 A が2人居る場合の最適配置となる条件を解析的に導出する。また、導出した条件より広い条件下での最適配置の存在の確認や、さらに作業者 A が3人居る場合の最適配置の条件を調査するために数値実験を行う。

本論文の構成は以下の通りである。2章では、リセット多期間制約サイクルモデル及び特殊作業者が2人

^{†1} 首都大学東京

^{†2} 名古屋工業大学

^{†3} 神奈川大学

受付：2012年5月28日、再受付（2回目）

受理：2013年1月10日

居る場合の最適配置問題について述べる。3章において、特殊作業者が2人居り、残りの作業者が一般作業員である場合の最適配置法則を導く。4章では、3章の問題において加工時間を指数分布と仮定した場合について数値実験により最適配置を導出し、その結果を考察する。最後に本論文のまとめと今後の課題を述べる。

2 モデルと問題の説明

2.1 リセット多期間制約サイクルモデル

本論文で考察するリセットモデルを以下に述べる [7].

- (1) 直列の生産ラインを考える。その生産ラインの工程数を n とする。
- (2) 製品は工程1, 工程2, ..., 工程 n の順で加工され、 n 工程で製品1個を加工する。
- (3) 仕掛品は、全て Z 時間で次の工程に移り加工される。すなわち、 Z は工程全体のサイクル時間となる。

次に、作業員の加工時間の仮定を述べる。

- (4) 作業員の加工時間は互いに独立で、作業員 l の加工時間 T_l は、確率密度関数 $f_l(t)$ の確率分布に従うとする。ただし、 t は時間を表し、 $l \in \{A, B\}$ である。
- (5) 上述したように Z は工程全体のサイクル時間を表すが、各工程においては目標の時間でもあるので、以後 Z を目標加工時間と呼ぶことにする。

このとき、 $l \in \{A, B\}$ に対して、

- P_l : 作業員 l が遊休となる確率、すなわち、
 $P_l = \Pr\{T_l \leq Z\}$ であり、
 Q_l : 作業員 l が遅れとなる確率、すなわち、
 $Q_l = \Pr\{T_l > Z\}$ であり、
 TS_l : 作業員 l の期待遊休時間、すなわち、
 $TS_l = E[(Z - T_l)I(T_l \leq Z)]$ であり、
 TL_l : 作業員 l の期待遅れ時間、すなわち、
 $TL_l = E[(T_l - Z)I(T_l > Z)]$ である。ここで、 $I(\cdot)$ は指標関数で、

$$I(K) = \begin{cases} 1 & (K \text{ が真}) \\ 0 & (K \text{ が偽}) \end{cases}$$

と定義する。

次に、発生する費用として以下を考える (図1) [7]. 本論文では、各工程には、作業員や資源が、加工しているかしないかにかかわらず、時間 Z だけ拘束されていると考えているために目標加工時間 Z に対して単位時間あたり $C_i (\geq 0)$ の費用を考える。また、加

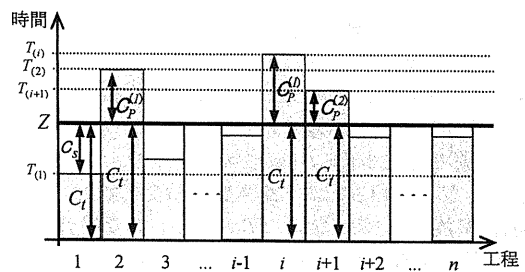


図1 加工時間と費用の関係

工時間が遅れそうな場合には作業員の残業や追加の資源を投入するなどして、加工が時間 Z になるようにすることを仮定し、単位時間あたり遅れ費用 $C_p^{(k)}$ を考える (このことが本論文で考察するモデルをリセットモデルと呼ぶ由縁である)。逆に、加工が Z 以下で終了すると次の工程に移るまでに仕掛の在庫が生じることを想定し、単位時間あたり遊休費用 $C_s (\geq 0)$ を考える。

以上のことをまとめると次となる。

- (6) 各工程では、目標加工時間 Z に対して単位時間あたり $C_i (\geq 0)$ の費用が発生する。
- (7) 各工程において、加工時間が Z 以下になった場合、単位時間あたり遊休費用 $C_s (\geq 0)$ が発生する。逆に、
- (8) m 工程連続して目標加工時間 Z を超えた場合は、超過した m 番目の工程において単位時間あたり遅れ費用 $C_p^{(m)}$ が発生する。ただし、 $1 \leq m \leq n$ である。また、 $0 \leq C_p^{(1)} \leq C_p^{(2)} \leq \dots \leq C_p^{(m)}$ であり、

$C_p^{(m)} (1 \leq m \leq n)$ は、

$$\begin{aligned} C_p^{(k_1+k_2+\dots+k_u)} &= C_p^{(k_1+k_2+\dots+k_u-1)} = \dots = C_p^{(k_1+k_2+\dots+k_{u-1}+1)} > \\ &\dots \\ C_p^{(k_1+k_2+k_3)} &= C_p^{(k_1+k_2+k_3-1)} = \dots = C_p^{(k_1+k_2+1)} > \\ C_p^{(k_1+k_2)} &= C_p^{(k_1+k_2-1)} = \dots = C_p^{(k_1+1)} > \\ C_p^{(k_1)} &= C_p^{(k_1-1)} = \dots = C_p^{(1)} \end{aligned}$$

を満たすと定義する。ただし、 $k_1+k_2+\dots+k_u = n$ である。すなわち、 $u (1 \leq u \leq m)$ は同じ値を1個と数えた時の $C_p^{(m)} (1 \leq m \leq n)$ の個数を表し、 $k_o (1 \leq o \leq u)$ は同一値となる $C_p^{(m)} (1 \leq m \leq n)$ の個数を表す。また、 $1 \leq o \leq u$ に対して $i_o \equiv \sum_{k=1}^o k_x$ は $C_p^{(m)}$ の値が o 番目に異なる値となる連続遅れ工程数を表す。

加工時間と費用の関係は、縦軸に加工時間、横軸に工程をとった図1により説明する。工程 i の加工時

間を T_0 とすると、例えば、工程1では、目標加工時間 Z までに加工時間 $T_{(1)}$ で終了している($T_{(1)} < Z$)。この場合には、工程1でかかった総費用は目標加工時間 Z に対する加工費用 C_i (単位時間あたり)に、 $T_{(1)}$ から Z までの間で発生する C_i (単位時間あたり)が加算される。一方、工程2では、目標加工時間 Z までに加工時間 $T_{(2)}$ が終了していない($T_{(2)} > Z$)。この場合は、目標加工時間 Z に対して C_i (単位時間あたり)に Z から $T_{(2)}$ までに発生する $C_p^{(1)}$ (単位時間あたり)が加算される。ここで注意されたいのは、工程 i と $i+1$ の場合のように、2回連続して遅れた場合には、工程 $i+1$ には Z から $T_{(i+1)}$ までに $C_p^{(2)}$ ($C_p^{(2)} > C_p^{(1)}$)が発生する。

以下の例で本モデルをイメージ的に説明する。

図2のように製品Aは第1期において工程1で、第2期において工程2、第3期において工程3、第4期において工程4で加工され、製品として完成し出荷される。

製品Bは第2期において工程1で、第3期において工程2、第4期において工程3、第5期において工程4で加工され、製品として完成し出荷される。ここで、全ての仕掛品が次の工程に移る時間は同じである(加工開始から Z 時間)。例えば、第4期においては、製品Aは工程4、製品Bは工程3、製品Cは工程2、製品Dは工程1で、加工されているが、次の第5期で、製品Aが出荷、製品Bが工程4、製品Cが工程3、製品Dが工程2に移り加工され始めるタイミングは、加工開始から Z 時間であり、全工程同様である。各期間の長さは Z なので、第4期は $3Z$ から開始され $4Z$ で終了、第5期は $4Z$ から開始され $5Z$ で終了となる。一つの期間において、全ての工程が同時に実行され(ラインの開始時を除く)ていることになる。

このような状況のもとで、本論文では、各作業者をどのように各工程に割り当て(配置)すれば、最も期待費用が安くなるかという問題を考察している。

2.2 最適配置問題

最適配置問題を考える前に、さらに以下の記号を定義する。 $1 \leq i < j \leq n$ に対して

$\pi(i, j)$: 2人の特殊作業員Aを工程 i と工程 j に配置し、 $n-2$ 人の一般作業員Bを工程 i と工程 j 以外の工程に配置する配置

$TC(n, \pi(i, j))$: 配置 $\pi(i, j)$ で作業員が配置されている場合の工程1から工程 n までの n 工程の期待費用((1)式で表される)

とする。

$$TC(n, \pi(i, j)) = nC_i Z + f(n, \pi(i, j)). \quad (1)$$

ここで、

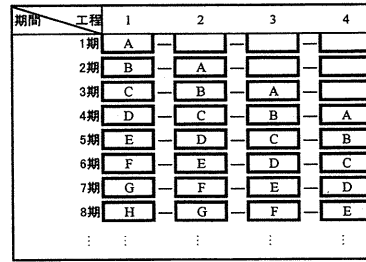


図2 リセット多期間モデルのイメージ図

$f(n, \pi(i, j))$: 配置 $\pi(i, j)$ において n 工程で発生した遊休と遅れによる期待費用

である。この時、最適配置問題は

$$TC(n, \pi^*) = \min_{1 \leq i < j \leq n} TC(n, \pi(i, j)) \quad (2)$$

を満足する配置 π^* を求める問題として表される。

ただし、(1)式からわかるように、目標加工時間 Z が一定の場合、 n 工程の総目標加工費用 $nC_i Z$ が一定なので、(2)式を

$$f(n, \pi^*) = \min_{1 \leq i < j \leq n} f(n, \pi(i, j)) \quad (3)$$

と書き直すことができる。

ここで、配置 π^* を本論文では最適配置と呼ぶ。

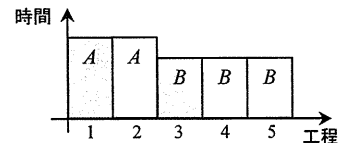
3 特殊作業員が2人居る場合の最適配置法則

本章では、 $n-2$ 人の一般作業員の加工時間が同一分布に従い、2人の特殊作業員Aの作業時間分布が異なる場合を考える(図3)。

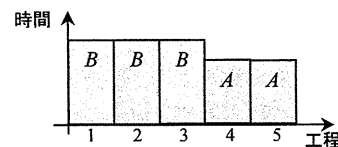
この時、期待費用 $f(n, \pi(i, j))$ は

$$f(n, \pi(i, j)) = C_s \left((n-2)TS_B + 2TS_A \right) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^l CF(w, \alpha; \pi(i, j)) \right)^2 \quad (4)$$

となる。ただし、 $1 \leq \alpha \leq w \leq n$ に対して、



(a) 作業の遅い作業員が2人居る場合($\pi(1,2)$)



(b) 作業の速い作業員が2人居る場合($\pi(4,5)$)

図3 特殊作業員が2人居る場合の最適配置例

$CF(w, \alpha; \pi(i, j))$ は、配置 $\pi(i, j)$ の時、工程 $w - \alpha$ が遅れず、工程 $w - \alpha + 1$ から工程 w までの α 工程が遅れた時の工程 w で発生する期待遅れ費用である [6].

ここで、最適配置法則 (定理) を導出するために、有用な補助定理 1 と 2 を示す.

補助定理 1

$1 \leq o \leq u$ を満たす o に対して

$$f(n; \pi(i, j+1)) - f(n; \pi(i, j)) = \begin{cases} \left(\begin{aligned} &(Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot A(i, j) \\ &+ (Q_A - Q_B) \cdot \begin{pmatrix} C_P^{(j-i+1)} \\ -C_P^{(j-i)} \end{pmatrix} \cdot Q_B^{j-i-1} \cdot \begin{pmatrix} Q_A \cdot TL_B \\ -TL_A \end{pmatrix} \\ &+ (C_P^{(j+1)} - C_P^{(j)}) \cdot Q_A^2 \cdot Q_B^{j-1} \cdot \begin{pmatrix} TL_A - TL_B \\ Q_A - Q_B \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \\ i = i_o, j = j_o \\ \left(\begin{aligned} &(Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot A(i, j) \\ &i_o + 1 \leq i \leq i_{o+1} - 1, j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \end{aligned} \right) \end{cases} \quad (5)$$

となる. ただし,

$$A(i, j) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n-j-1} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right) - \sum_{\alpha=1}^{j-i-1} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right) - \sum_{\alpha=j-i}^{j-1} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right) \cdot \frac{Q_A}{Q_B}$$

とする.

証明) 付録に示す.

補助定理 2

$1 \leq o \leq u$ を満たす o に対して

$$f(n; \pi(i+1, j)) - f(n; \pi(i, j)) = \begin{cases} \left(\begin{aligned} &(Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot B(i, j) \\ &+ (Q_A - Q_B) \cdot (C_P^{(j-i)} - C_P^{(j-i-1)}) \cdot Q_B^{j-i-2} \cdot TL_A \\ &+ (C_P^{(j+1)} - C_P^{(j)}) \cdot Q_B \cdot Q_A \cdot \begin{pmatrix} TL_A - TL_B \\ Q_A - Q_B \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \\ i = i_o, j = j_o \\ \left(\begin{aligned} &(Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot B(i, j) \\ &i_o + 1 \leq i \leq i_{o+1} - 1, j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \end{aligned} \right) \end{cases} \quad (6)$$

となる. ただし,

$$B(i, j) \equiv \sum_{\alpha=1}^{j-i-2} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right) + \sum_{\alpha=j-i}^{n-i-1} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right) \cdot \frac{Q_A}{Q_B} - \sum_{\alpha=1}^{i-1} \left((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \right)$$

とする.

証明) 付録に示す.

以上の補助定理より、特殊作業者が 2 人居る場合の最適配置法則 (定理) は以下のように得られる.

定理 1

$$M \equiv \frac{TL_A}{Q_A} \cdot \left(\frac{1}{Q_B} - \frac{1}{Q_A} \right),$$

また、 $1 \leq o \leq u$ を満たす o に対して,

$$L_o \equiv \frac{C_P^{(j_o+1)} - C_P^{(j_o)}}{C_P^{(j_o)} - C_P^{(j_o-1)}}, \text{ ただし, } j_o \equiv \sum_{k=1}^o k_x$$

とすると,

$C_P^{(j)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照), $Q_A > Q_B$

かつ $\frac{TL_A}{Q_A} > \frac{TL_B}{Q_B}$ で,

1-1) $\max L_o < M$ ならば、 $\pi(1, n)$ が最適配置,

1-2) $\min L_o > M$ ならば、 $\pi(1, 2)$ が最適配置

である.

定理 2

$C_P^{(j)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照), $Q_A < Q_B$

かつ $\frac{TL_A}{Q_A} < \frac{TL_B}{Q_B}$ ならば、最適配置 $\pi(i, j)$ は

$$\left\{ \pi(i, j) \mid i \geq \frac{j-1}{2}, j \geq \frac{n}{2} \right\} \text{ にある.}$$

証明)

定理 1 :

1-1) について

$1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して,

$$f(n; \pi(i, j)) - f(n; \pi(1, j)) \geq 0 \quad (7)$$

となる (図 4). また,

$2 \leq j \leq n$ を満たす j に対して,

$$f(n; \pi(1, n)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (8)$$

となること (図 5) を証明すれば、 $\pi(1, n)$ が最適配置であることがいえる。

次の a) と b) の二つのステップで (7) 式を証明する。

a) $1 \leq i < \frac{j-1}{2} \leq n$ を満たす i と j に対して、

$$f(n; \pi(i+1, j)) - f(n; \pi(i, j)) \geq 0 \quad (9)$$

が成立することを示す。

$1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して、補助定理 2 より、

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(i+1, j)) - f(n; \pi(i, j)) \\ &= (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{j-i-2} g(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{i-1} g(\alpha) \right) + S1_{i,j} \quad (10) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} S1_{i,j} &\equiv (Q_A - Q_B) \cdot \sum_{\alpha=j-i}^{n-1} \left(\begin{matrix} C_p^{(\alpha+1)} \\ -C_p^{(\alpha)} \end{matrix} \right) \cdot Q_B^{\alpha-1} \cdot TL_B \cdot \frac{Q_A}{Q_B} \\ &+ (Q_A - Q_B) \cdot \begin{pmatrix} C_p^{(j-i)} \\ -C_p^{(j-i-1)} \end{pmatrix} \cdot Q_B^{j-i-2} \cdot TL_A \\ &+ (C_p^{(i+1)} - C_p^{(i)}) \cdot Q_B^i \cdot Q_A \cdot \left(\frac{TL_A}{Q_A} - \frac{TL_B}{Q_B} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

とする。また、

$$g(\alpha) \equiv (C_p^{(\alpha+1)} - C_p^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1} \quad (12)$$

とする。

$C_p^{(\alpha)}$ が α に対して非減少で、 $Q_A > Q_B$ かつ

$\frac{TL_A}{Q_A} > \frac{TL_B}{Q_B}$ ならば、(10) 式より、

$$S1_{i,j} \geq 0 \quad (13)$$

となる。また、(11) 式より、

$1 \leq i < \frac{j-1}{2} \leq n$ を満たす i と j に対して、

$$\sum_{\alpha=1}^{j-i-2} g(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{i-1} g(\alpha) = \sum_{\alpha=i}^{j-i-2} g(\alpha) \geq 0 \quad (14)$$

となる。

(12) 式と (13) 式より、(10) 式から、

$1 \leq i < \frac{j-1}{2} \leq n$ を満たす i と j に対して

$$f(n; \pi(i+1, j)) - f(n; \pi(i, j)) \geq 0 \quad (15)$$

が成立する (図 4)。

よって、(9) 式が証明される。

次に、

b) $1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して

$$f(n; \pi(i, j)) - f(n; \pi(1, j)) \geq 0 \quad (16)$$

が成立することを示す。

今、 $1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して、

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(i, j)) - f(n; \pi(1, j)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{i-1} f(n; \pi(\beta+1, j)) - f(n; \pi(\beta, j)) \quad (17) \\ &= (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \sum_{\beta=1}^{i-1} \left(\begin{matrix} \sum_{\alpha=1}^{j-\beta-2} g(\alpha) \\ -\sum_{\alpha=1}^{\beta-1} g(\alpha) \end{matrix} \right) + \sum_{\beta=1}^{i-1} S1_{\beta,j} \end{aligned}$$

である。

$1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して、

$$\sum_{\beta=1}^{i-1} \left(\begin{matrix} \sum_{\alpha=1}^{j-\beta-2} g(\alpha) \\ -\sum_{\alpha=1}^{\beta-1} g(\alpha) \end{matrix} \right) = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^i \sum_{\alpha=\beta}^{j-\beta-2} g(\alpha) & i < \frac{j-1}{2} \\ \sum_{\beta=1}^{j-i-2} \sum_{\alpha=\beta}^{j-\beta-2} g(\alpha) & j-2 > i \geq \frac{j-1}{2} \\ 0 & i = j-2 \end{cases} \quad (18)$$

となる。

$C_p^{(\alpha)}$ が α に対して非減少で、 $Q_A > Q_B$ ならば、(13) 式と (18) 式より、(17) 式から、 $1 \leq i < j \leq n$ を満たす i と j に対して、

$$f(n; \pi(i, j)) - f(n; \pi(1, j)) \geq 0 \quad (19)$$

が成立する。

よって (16) 式が証明される。

(9) 式及び (16) 式が成立することより、(7) 式が証明される。

次に、

- $\{j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid 2 \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j と、
- $\{j = j_o \mid 2 \leq j_o \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j

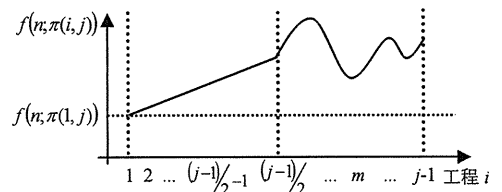


図 4 定理 1-1) における i に対する $f(n; \pi(i, j))$ の変化

に分けて c) と d) の二つのステップで(8)式が成立することを以下に示す。

ここで、 $C_P^{(i)}$ が i に対して非減少という条件で証明の便宜を図るため、仮定 8 のように $1 \leq o \leq u$ を満たす o に対して $j_o \equiv \sum_{k=1}^o k_x$ とする。

c) $\{j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid 2 \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j に対して、

$$f(n; \pi(1, n)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (20)$$

が成立することを示す (図 6)。

今、 $\{j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid 2 \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j に対して、補助定理 1 より、

$$f(n; \pi(1, j+1)) - f(n; \pi(1, j)) = (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n-j-1} ((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1}) - \sum_{\alpha=1}^{j-2} ((C_P^{(\alpha+1)} - C_P^{(\alpha)}) \cdot Q_B^{\alpha-1}) \right) \quad (21)$$

となる。

$C_P^{(\alpha)}$ が α に対して非減少ならば、(12)式より、

$$\left\{ j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid \frac{n+1}{2} \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u) \right\}$$

を満たす j に対して、

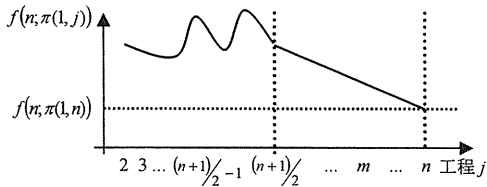


図 5 定理 1-1)における j に対する $f(n; \pi(1, j))$ の変化

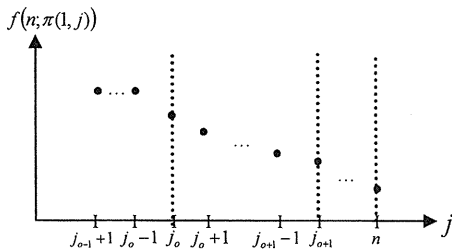


図 6 $\{j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid 2 \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ と $\{j = j_o \mid 2 \leq j_o \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ における $f(n; \pi(1, j))$ の変化のイメージ

$$\sum_{\alpha=1}^{n-j-1} g(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{j-2} g(\alpha) = - \sum_{\alpha=n-j}^{j-2} g(\alpha) \leq 0 \quad (22)$$

となる。また、 $Q_A > Q_B$ であることと(22)式より、(21)式から、

$$\left\{ j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid \frac{n+1}{2} \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 \leq n (1 \leq o \leq u) \right\}$$

を満たす j に対して、

$$f(n; \pi(1, j+1)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (23)$$

が成立する (図 5)。

$$\left\{ j_o + 1 \leq j \leq j_{o+1} - 1 \mid 2 \leq j_o + 1, j_{o+1} - 1 < \frac{n+1}{2} (1 \leq o \leq u) \right\}$$

を満たす j に対して、

$$f(n; \pi(1, n)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (24)$$

も同様に示すことができる。

(23)式と(24)式より、(20)式が証明される。

次に、

d) $\{j = j_o \mid 2 \leq j_o \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j に対して、

$$f(n; \pi(1, n)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (25)$$

が成立することを示す (図 6)。

$$S_{2, j} \equiv -(Q_A - Q_B) \cdot Q_B^{j-1} \cdot D(j) \quad (26)$$

とする。ただし、

$$D(j) \equiv \left(\begin{array}{l} (C_P^{(j+1)} - C_P^{(j)}) \cdot \left(\frac{Q_A^2 \cdot \left(\frac{TL_A}{Q_A} - \frac{TL_B}{Q_B} \right)}{- (Q_A - Q_B)} \right) \\ + (C_P^{(j)} - C_P^{(j-1)}) \cdot \left(\frac{TL_A}{Q_B} \right) \end{array} \right)$$

とすると、補助定理 1 と(12)式より、

$\{j = j_o \mid 2 \leq j_o \leq n (1 \leq o \leq u)\}$ を満たす j に対して、

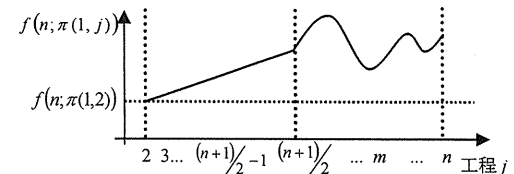


図 7 定理 1-2)における j に対する $f(n; \pi(1, j))$ の変化

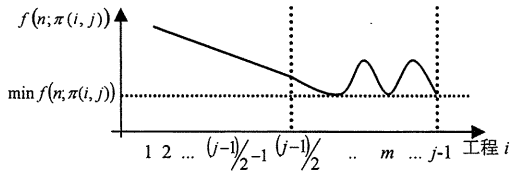


図 8 定理 2 における i に対する $f(n; \pi(i, j))$ の変化

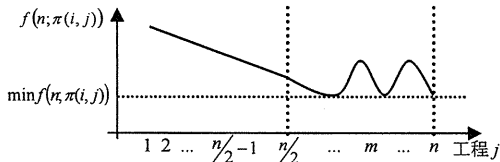


図 9 定理 2 における j に対する $f(n; \pi(i, j))$ の変化

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(1, j+1)) - f(n; \pi(1, j)) \\ &= (Q_A - Q_B) \cdot TL_B \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n-j-1} g(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{j-2} g(\alpha) \right) + S2_{1,j} \quad (27) \end{aligned}$$

となる。

$C_p^{(a)}$ が α に対して非減少ならば、 $\max L_o < M$ であることから、

$$D(j) \geq 0 \quad (28)$$

となることと $Q_A > Q_B$ であることから、(26)式より

$$S2_{1,j} \leq 0 \quad (29)$$

となる。

$Q_A > Q_B$ であることと(29)式から、(27)式より、

$$\left\{ j = j_0 \left| \frac{n+1}{2} \leq j_0 \leq n (1 \leq o \leq u) \right. \right\} \text{を満たす } j \text{ に対して、}$$

$$f(n; \pi(1, j+1)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (30)$$

が成立する (図 5)。また、

$$\left\{ j = j_0 \left| 2 \leq j_0 < \frac{n+1}{2} (1 \leq o \leq u) \right. \right\} \text{を満たす } j \text{ に対して、}$$

$$f(n; \pi(1, n)) - f(n; \pi(1, j)) \leq 0 \quad (31)$$

も同様に示すことができる。

(30)式と(31)式が成立することより、(25)式が証明される。

(20)式と(25)式が成立することより、(8)式が証明される。

(7)式と(8)式が成立することより、定理 1-1)が証明される。

1-2)について、

1-1)の証明と同様に、

$C_p^{(i)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照)、 $Q_A > Q_B$

かつ $\frac{TL_A}{Q_A} > \frac{TL_B}{Q_B}$ で、 $\min L_o > M$ ならば、(8)式より

$2 \leq j \leq n$ を満たす j に対して、

$$f(n; \pi(1, j+1)) - f(n; \pi(1, 2)) \geq 0 \quad (32)$$

となる。

(7)式と(32)式から、定理 1-2)が証明される (図 7)。

よって、定理 1 が証明される。

(定理 1 証明終了)

定理 2 の場合：

$C_p^{(i)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照)、 $Q_A < Q_B$

かつ $\frac{TL_A}{Q_A} < \frac{TL_B}{Q_B}$ ならば、補助定理 2 より、

$1 \leq i < \frac{j-1}{2}$ を満たす i と j に対して

$$f(n; \pi(i+1, j)) - f(n; \pi(i, j)) \leq 0 \quad (33)$$

となる (図 8)。

又、 $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照)、

$Q_A < Q_B$ かつ $\frac{TL_A}{Q_A} < \frac{TL_B}{Q_B}$ ならば、補助定理 1 より、

$2 \leq j < \frac{n}{2}$ を満たす j に対して

$$f(n; \pi(i, j+1)) - f(n; \pi(i, j)) \leq 0 \quad (34)$$

となる (図 9)。

よって、最適解は $\left\{ \pi(i, j) \mid i \geq \frac{j-1}{2}, j \geq \frac{n}{2} \right\}$ にあること

が証明される。

(定理 2 証明終了)

ここで、 $l \in \{A, B\}$ に対して TL_l/Q_l は作業員 l が遅れるという条件の下での遅れ時間の期待値 $E[T_l - Z | T_l > Z]$ となることに注意されたい。

特に全ての作業員の加工時間が指数分布に従う場合には次の系が得られる。

系

$l \in \{A, B\}$ に対して作業員 l の加工時間の確率密度関数 $f_l(t)$ を

$$f_l(t) = \mu_l e^{-\mu_l t} \quad (35)$$

とする。ただし、 μ_l は作業員 l の加工率である。

このとき、

$$M \equiv \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_A} - \frac{1}{\mu_B}\right)} \cdot \left(\frac{1}{e^{-\mu_B Z}} - \frac{1}{e^{-\mu_A Z}}\right),$$

また、 $1 \leq o \leq l$ を満たす o に対して、

$$L_o \equiv \frac{C_p^{(j_o+1)} - C_p^{(j_o)}}{C_p^{(j_o)} - C_p^{(j_o-1)}}, \text{ ただし, } j_o \equiv \sum_{\kappa=1}^o k_\kappa$$

とすると、

1) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照),

$$\mu_A < \mu_B \text{ で,}$$

1-1) $\max L_o < M$ ならば, $\pi(1,n)$ が最適配置である

1-2) $\min L_o > M$ ならば, $\pi(1,2)$ が最適配置である

2) $C_p^{(i)}$ が i に対して非減少 (仮定 8 を参照),

$\mu_A \geq \mu_B$ ならば, 最適配置 $\pi(i,j)$ は

$$\left\{ \pi(i,j) \mid i \geq \frac{j-1}{2}, j \geq \frac{n}{2} \right\} \text{ にある.}$$

証明)

$l \in \{A, B\}$, $f_j(t) = \mu_l e^{-\mu_l Z}$ とすれば, 定理より成立.

(系の証明終了)

定理の結果から, 定理 1 では $n-2$ 人の作業者に比して作業の遅い (加工時間が長い) 2 人の作業者は工程 1, 工程 2 か, 工程 1, 工程 n に配置, 定理 2 では $n-2$ 人の作業者に比して作業の速い (加工時間が短い) 2 人の作業者は全工程の後半に配置すべきであることを示している. しかし, 2) については, 作業の速い作業者を全工程の後半のどの工程に配置するかは定理の結果から判別できないので 4 章において実際の数値考察を用いながら後半工程のどの工程に配置すべきかを考察する.

4 数値実験と考察

本章では, 各作業者の加工時間を指数分布と仮定し, 作業の速い作業者が 2 人居る場合の具体的な最適配置を考察する. また, 特殊作業者が 2 人居る場合と 3 人居る場合の最適配置の規則性の関連性を考察するため, 数値実験を行う.

ここで, 期待費用 $f(n; \pi(i, j))$ の算出は山本他[9]の再帰方程式を用いる.

数値実験を行うため, パラメータは以下のように設定する. 工程数 $n=7$, 連続遅れ費用を $C_p^{(1)} = 40$, $C_p^{(2)} = 80$, $C_p^{(3)} = 160$, $C_p^{(4)} = 320$, $C_p^{(5)} = 640$, $C_p^{(6)} = 1280$, $C_p^{(7)} = 2560$, 目標加工時間 (サイクル時間) を $Z=2$, そして遊休費用を $C_s = 20$ とする.

一般作業者 B の加工率 μ_B を固定し, 特殊作業者 A の加工率 μ_A を変化させ, 速い特殊作業者が 2 人と 3 人居る場合の最適配置 (表 1) と遅い特殊作業者が 2 人と 3 人居る場合の最適配置 (表 2) の挙動を調べた.

作業の速い特殊作業者が 2 人居る場合, その 2 人を全工程の後半 (定理 2 より) のどの工程に配置すれば最適配置になるかについての結果を表 1 に示す.

表 1 では速い作業者の加工率の増加に伴い, 速い作業者の配置が最後の工程から徐々に真ん中の工程に移る傾向が確認できた.

• 特殊作業者が 2 人居る場合と 3 人居る場合の最適配置の規則性の関連性について

1. 速い特殊作業者が 2 人と 3 人居る場合の関連性

表 1 から作業の速い特殊作業者が 3 人居る場合も 2 人居る場合と同様に, 作業者の加工率の増加につれ, 速い作業者の配置が最後の工程から徐々に真ん中の工程に移る傾向が確認できた. これは, 加工率が大きな特殊作業者 A を中心に配置することにより連続して工程が遅れることを防ぐことができ, 費用が低くなるためと考えられる. すなわち, 配置を変えることによって, 連続遅れがシステム全体に与える影響を最低限に抑え, 費用が削減される.

表 1 速い特殊作業者が 2 人と 3 人の場合の最適配置

μ_A	μ_B	作業の速い作業者が 2 人の場合	作業の速い作業者が 3 人の場合
0.2	0.1	BBBBBAA	BBBBAAA
0.3	0.1	BBBBBAA	BBBBAAA
0.4	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB
0.5	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB
0.6	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB
0.7	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB
0.8	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB
0.9	0.1	BBBAAAB	BBBAAAAB

表 2 遅い特殊作業者が 2 人と 3 人の場合の最適配置

μ_A	μ_B	作業の遅い作業者が 2 人の場合	作業の遅い作業者が 3 人の場合
0.1	0.2	AABBBBB	AAA BBBB
0.1	0.3	AABBBBB	AAA BBBB
0.1	0.4	AABBBBB	AA BBBBA
0.1	0.5	AABBBBB	AA BBBBA
0.1	0.6	ABBBBBB	AA BBBBA
0.1	0.7	ABBBBBB	ABA BBBBA
0.1	0.8	ABBBBBB	ABA BBBBA
0.1	0.9	ABBBBBB	ABA BBBBA

2. 遅い特殊作業者が2人と3人居る場合の関連性

表2から作業者の加工率が大きくなるにつれ、遅い特殊作業者が3人居るうち少なくとも1人を工程1に、残りの2人のうち1人が前工程から最後工程に、もう一人が前工程から真ん中ほどの工程に分散していく。この場合も実験範囲内と言えるが、2人居る場合と同様な挙動が確認できた。

以上のことから、特殊作業者が3人居ても、2人居る場合と高い関連性があることがいえる、1人居る場合[6]、そして2人居る場合と同様な方法で最適配置の条件を求められるだろう。

5 おわりに

本論文では、リセット多期間制約サイクルモデルにおいて2種類の作業者が存在し、一方の種類の作業者が2人で、他方の作業者が $n-2$ 人の場合の最適配置法則(定理)の一つの十分条件を数理的証明により導いた。その結果、

- (1) 作業の遅い作業者が2人居る場合、その作業者を L_i と M の大小関係により、工程1、工程2か、工程1、工程 n に配置すれば最適配置になる。また、
- (2) 作業の速い作業者が2人居る場合、その作業者を全工程の後半に配置すれば最適配置になる。

最後に、加工時間が指数分布に従うと仮定した上で、数値例を通じて、定理2の条件において、具体的に全工程の後半のどの工程に配置すれば最適配置になるかについても考察した。その結果、この場合の最適配置は固定ではなく、単調に変化していくことがわかった。この性質は、山本他[6]で提案した特殊作業者が1人居る場合の最適配置法則とも高い関連性を示した。

今後の課題として、本論文では加工率が2種類、特殊作業者が2人居る場合の最適配置の一つの十分条件を導出したが、その必要十分条件の検討及び定理2において未知部分の最適配置法則の考察がある。また、特殊作業(本論文は2人居る場合)の人数、あるいは、作業者の加工率の種類(本論文は2種類の場合)を増やし、より複雑な工程条件の場合に対応できる定理の検討がある。そして、その結果を利用し最適なサイクル時間 Z を決定することが挙げられる。

謝 辞

本論文は日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究(C)(2011年度-2013年度、課題番号:23510161)の一環として進められたものである。ここに謝意を表す。

参 考 文 献

- [1] 社団法人日本経営工学会編：「生産管理用語辞典」、日本規格協会(2007)
- [2] Xinhui, Z. and Jonathan, F.: "A Multi-Period Machine Assignment Problem", *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 170, pp. 398-415 (2006)
- [3] Sennott, L. I., Van Oyen, M. P. and Iravani, S.M.R. "Optimal Dynamic Assignment of a Flexible Worker on an Open Production Line with Specialists", *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 170, pp. 541-566 (2006)
- [4] Miralles, C., Garcia-Sabater, J.P., Andres, C. and Cardos, M.: "Branch and Bound Procedures for Solving the Assembly Line Worker Assignment and Balancing Problem: Application to Sheltered Work Centres for Disabled", *Discrete. Appl. Math.*, Vol. 156, pp. 352-367 (2008)
- [5] 山本久志, 松井正之, 劉 軍: "多期間制約サイクル問題と最適配置に関する基礎的研究", 日本経営工学会論文誌, Vol. 57, No. 1, pp. 23-31 (2006)
- [6] 山本久志, 孫 晶, 松井正之, 孔 憲達: "リセット多期間制約サイクル問題における最適配置法則に関する考察 ~少数の特殊な作業者が居る場合~", 日本経営工学会論文誌, Vol. 62, No. 5, pp. 239-246 (2011)
- [7] 山本久志, 孫 晶, 大石貴之, 松井正之: "ノンリセット多期間制約サイクルモデルにおける最適切替問題に関する研究 ~基準工程により加工率を切替える場合~", 日本経営工学会論文誌, Vol. 61, No. 4, pp. 234-243 (2010)
- [8] 山本久志, 松井正之, 白 雪松: "分岐限定法を用いた多期間制約サイクルの最適配置算出アルゴリズム", 日本経営工学会論文誌, Vol. 58, No. 1, pp. 38-43 (2007)
- [9] Yamamoto, H., Sun, J. and Matsui, M.: "A Study on Limited-Cycle Scheduling Problem with Multiple Periods", *Comp. Ind. Eng.*, Vol. 59, No. 4, pp. 675-681.(2010)
- [10] 沼上 幹: "組織デザイン", 日本経済新聞出版社, pp. 42-86 (2004)

付 録

1. 補助定理1の証明

配置 $\pi(i, j)$ の時の工程1から工程 n までの n 工程で発生する期待費用 $f(n; \pi(i, j))$ は

$$f(n; \pi(i, j)) = C_S((n-2)TS_B + 2TS_A) + \sum_{w=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^w CF(w, \alpha; \pi(i, j)) \right) \quad (A-1)$$

となる。また、 $1 \leq \alpha \leq w \leq n$ に対して、 $CF(w, \alpha; \pi(i, j))$ は、配置 $\pi(i, j)$ の時、工程 $w - \alpha$ が遅れず、工程 $w - \alpha + 1$ から工程 w までの α 工程が遅れた時の工程 w で発生する期待遅れ費用を表す (図 A-1)。ここで、 α は遅れが連続して発生した工程数を意味する。この時、 $w > \alpha$ の時は、

$$CF(w, \alpha; \pi(i, j)) = \begin{cases} C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (w < i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_A \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (w = i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_A \cdot Q_B^{\alpha-1} & (j > w > i+1, \alpha = w-i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (j > w > i+1, \alpha = w-i-1) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_A \cdot P_B \cdot Q_A \cdot Q_B^{\alpha-2} & (w = j, \alpha > w-i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_A \cdot P_A \cdot Q_B^{\alpha-1} & (w = j, \alpha = w-i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_A \cdot P_B \cdot Q_B^{\alpha-1} & (w = j, \alpha = w-i-1) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_A^2 \cdot Q_B^{\alpha-3} & (w > j, \alpha > w-i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_A \cdot Q_A \cdot Q_B^{\alpha-2} & (w > j, \alpha = w-i) \\ C_P^{(\alpha)} \cdot TL_B \cdot P_B \cdot Q_A \cdot Q_B^{\alpha-2} & (w > j, \alpha = w-i-1) \end{cases} \quad (A-2)$$

と表せる。ただし、 $w = \alpha$ の時は、便宜上

$$CF(w, \alpha; \pi(i, j)) = \begin{cases} C_P^{(w)} \cdot TL_B \cdot Q_B^{w-1} & (w < i) \\ C_P^{(w)} \cdot TL_A \cdot Q_B^{w-1} & (w = i) \\ C_P^{(w)} \cdot TL_B \cdot Q_A \cdot Q_B^{w-2} & (j > w > i) \\ C_P^{(w)} \cdot TL_A \cdot Q_A \cdot Q_B^{w-2} & (w = j) \\ C_P^{(w)} \cdot TL_B \cdot Q_A^2 \cdot Q_B^{w-3} & (w > j) \end{cases} \quad (A-3)$$

と定義する。

今、 $CF(w, \alpha; \pi(i, j+1)) - CF(w, \alpha; \pi(i, j))$ を考えると、この値は、費用が発生する工程 w 、連続して発生する工程数 α 及び特殊作業者の配置工程 i に応じて 0 となる。0 とならない場合を図 A-2 に示す。(図 A-2 は横に工程を表す。配置が $\pi(i, j+1)$ と $\pi(i, j)$ の場合において、○は遊休が発生した工程を、●は遅れが発生した工程を、◎は期待遅れ費用が発生する工程を表す。)

よって、

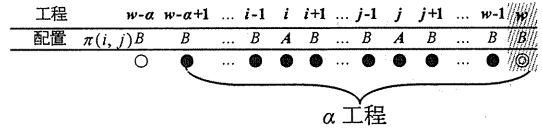


図 A-1 $CF(w, \alpha; \pi(i, j))$ について

○：遊休；●：遅れ；◎：期待遅れ費用が発生する工程

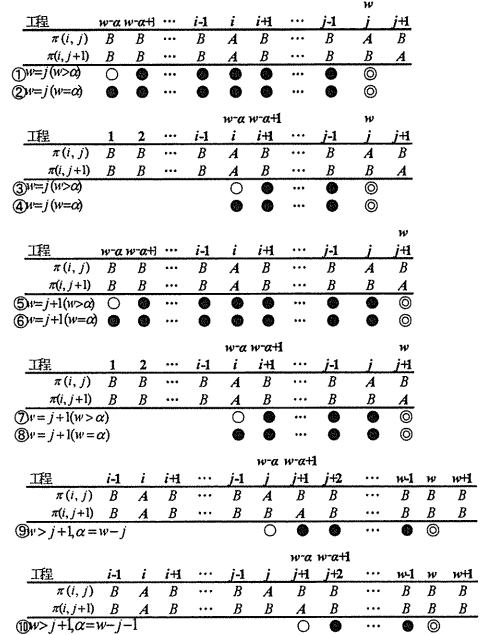


図 A-2 $f(n; \pi(i, j))$ と $f(n; \pi(i, j+1))$ において相殺されない場合

$$\begin{aligned} & f(n; \pi(i, j+1)) - f(n; \pi(i, j)) \\ &= \sum_{\alpha=j-i+1}^{j-1} \left(CF(j, \alpha; \pi(i, j+1)) - CF(j, \alpha; \pi(i, j)) \right) \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^{j-i} \left(CF(j, \alpha; \pi(i, j+1)) - CF(j, \alpha; \pi(i, j)) \right) \\ & \quad + \sum_{\alpha=j-i+2}^j \left(CF(j+1, \alpha; \pi(i, j+1)) - CF(j+1, \alpha; \pi(i, j)) \right) \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^{j-i+1} \left(CF(j+1, \alpha; \pi(i, j+1)) - CF(j+1, \alpha; \pi(i, j)) \right) \\ & \quad + \sum_{w=j+2}^n \left(CF(w, w-j; \pi(i, j+1)) - CF(w, w-j; \pi(i, j)) \right) \\ & \quad + \sum_{w=j+2}^n \left(CF(w, w-j-1; \pi(i, j+1)) - CF(w, w-j-1; \pi(i, j)) \right) \end{aligned} \quad (A-4)$$

となる。ただし、(A-4)式の右辺の第1項は図 A-2 の①②、第2項は図 A-2 の③④、第3項は図 A-2 の⑤⑥、第4項は図 A-2 の⑦⑧、第5、6項はそれぞれ⑨と⑩に対応する。ここで、②④⑥⑧は $w=\alpha$ なので、工程 1 から工程 w まで連続遅れが発生する。そして、

(A-4)式に(A-2)式と(A-3)式を代入すれば補助定理 1 は証明される。

(補助定理 1 の証明終了)

2. 補助定理 2 の証明

補助定理 1 と同様な考え方で証明できる。