

ヤリママト トルソンママト

氏 名 YAERMAIMAITI TUERXUNMAIMAITI
学位の種類 博士 (学術)
学位記番号 博第1057号
学位授与の日付 平成28年6月22日
学位授与の条件 学位規則第4条第1項該当 課程博士
学位論文題目 Eigenvalues of Laplacians for Kaehler Graphs
(ケーラーグラフのラプラシアン固有値)

論文審査委員 主査 教授 足立 俊明
教授 松添 博
准教授 山岸 正和

論文内容の要旨

頂点の集合と辺の集合の組であるグラフは、リーマン多様体の離散モデルとして古くから研究されており、グラフ上の道は多様体における測地線に対応すると考えられていて、道の生成作用素である隣接作用素や推移作用素によるラプラシアンを中心に考察が進められてきた。多様体の研究では、測地線だけではなく多様体に幾何構造に関連した曲線族を利用した考察方法が近年整備されつつあり、離散版であるグラフにおいても対応する考察を整備することが必要であると考えられる。本研究では、複素構造を持つ多様体における測地曲率が一定な曲線族による考察に対応して、複素構造に対応すると考えられる構造を有したグラフを考え、これらのグラフの対応するラプラシアンの固有値の様子を主として考察した。

幾何学的な構造を持つグラフとして、辺を2種類に分類することができるケーラーグラフとよばれるグラフを考察対象とした。論文の前半ではこのようなグラフが豊富にあることを示した。幾何学的な研究で重要な手法の1つとして、まず「良い」対象物を見つけ次にその対象物を基準として比較を行う、という考察方法がある。本論文では「良い」対象として頂点推移性を持つという対称性を考えた。頂点推移性から各頂点からでる2種類の

辺の数(次数)は等しくなるという正則性が導かれるが、頂点推移という対称性を持つ有限グラフを構成することができるための頂点数と次数に関する条件を、握手定理を利用し頂点数や次数の偶奇性に応じた普遍的な構成法を用意することで与えた。続いて種々のケーラーグラフを構成する方法として、補グラフ充填、和グラフ、直積グラフ、ケーラー・ケーラーグラフの構成方を整備し、立方体グラフ、ピーターセングラフやヒューッドグラフなど代表的な通常グラフに対応したケーラーグラフを与えた。

2種類の辺を用意した理由は、1つの種類の辺(主辺)によりリーマン多様体の測地線に相当する道を与え、他の種の辺(補助辺)を利用することにより曲率を持つ曲線を表現するためである。すなわち、主辺を p 個進み補助辺を q 個進む道を曲率 q/p で長さ p の道と考える。複素多様体においては複素構造方向に一定の曲率で曲がる曲線を考察することができるが、ケーラーグラフでは、2種類の辺の存在が構造を与え、このような2彩色道が主グラフ上の測地線を曲げたものとして考えることになる。論文の後半では2彩色道の生成作用素である (p,q) -確率的隣接作用素と (p,q) -確率的推移作用素の定義を与え、これらの作用素が主辺による主グラフ上の作用素と補助辺による補助グラフ上の作用素に分解されることをまず示し、その性質を利用してこれらの作用素を用いた (p,q) -ラプラシアンを考えて、その固有値を調べた。

主辺と補助辺とが交互に現れる $p=q=1$ の場合は、「確率的」という部分が次数を用いて表現することができ、他の場合よりも考察が容易になる。前半で構成法を与えた補グラフ充填ケーラー、和ケーラーグラフ、種々のタイプの直積ケーラーグラフについて、主として主グラフの隣接作用素と補助グラフの隣接作用素または推移作用素との可換性を利用することでラプラシアンの固有値を求めた。この結果の派生として、ケーラーグラフとしては同型ではないが、主グラフのラプラシアン及び $(1,1)$ -ラプラシアンがそれぞれ同じ固有値を持つような2つのケーラーグラフの組を与えることに成功した。この問題は、リーマン多様体や通常グラフの場合でも等スペクトル問題として重要であるが、ケーラーグラフの場合には1つの解答を与えたことになる。

一般の (p,q) -ラプラシアンに関しては、与えられたケーラーグラフと p -個の主辺や q -個の補助辺による道が作る誘導グラフとの関係が単純ではなく考察は容易ではない。そこで正則グラフに限ることで両者を関係づけ、確率的推移性を次数による推移性を書き直すことで考察を行った。一般の場合でも主グラフと補助グラフの隣接作用素の可換性が重要な役割を果たし、前半で構成法を与えたケーラーグラフで正則な場合に関して固有値を与えた。直積グラフの場合では、大部分の場合各成分グラフが正則になることを仮定としておく必要があったが、辞書積の場合には誘導グラフを数学的帰納法により表現することができ、条件を弱くすることに成功している。

論文審査結果の要旨

リーマン幾何学の分野において、多様体の形状を考察するために、測地線の性質を調べたり測地線による酔歩の生成作用素であるラプラス作用素の性質を調べたりすることは、代表的な手法の1つになっている。この手法を幾何構造が与えられたリーマン多様体の考察に展開するために磁場による軌道の性質を考察することが提唱され、特に複素構造を持つ場合に成功を見ている。一方、リーマン多様体の離散モデルとして頂点集合と辺集合とからなるグラフが対応して考察されてきており、複素構造を持つ多様体の離散化の1つとして頂点集合を共通に持つ2種類のグラフの複合体としてケーラーグラフが導入されている。

本論文では、主グラフと補助グラフとを持つケーラーグラフを構成するための種々の手法を導入し、グラフ上で磁界の影響下での酔歩の軌道と考えられる二彩色道の生成作用素であるラプラス作用素に関して、導入されたグラフについて構成成分グラフの固有値とケーラーグラフの固有値との関係を調べ、併せてケーラーグラフに関する等スペクトル問題に関する考察を行っている。

1章でグラフに関する基本的な定義と本論文で利用する基本定理を準備した上で、2章で補充ケーラーグラフ、直積型ケーラーグラフなど通常のグラフからケーラーグラフを構成するための手法を与え、対称性がある頂点推移ケーラーグラフが構成できるための条件を与えている。続いて3章では二彩色道を定義することで、複素構造を持つ多様体においてケーラー磁場による軌道を考えることに対応することを述べ、ケーラーグラフが構造から誘導された磁場を持つ多様体の離散化に相当することを説明している。4章と5章では、二彩色道に対して確率的重みを導入して確率的隣接ラプラシアンと確率的推移ラプラシアンとを定義し、2章で与えた構成方法による有限ケーラーグラフに対して構成成分のグラフの固有値を用いてケーラーグラフの固有値を記述している。二彩色道が主グラフの辺である主辺1つと補助グラフの辺である補助辺1つとを基本構成要素とする(1,1)ステップの場合は確率的重みが主グラフと補助グラフの次数とで表現されるため比較的考察しやすく広いクラスのケーラーグラフに対して考察が行われている。しかし一般の(p,q)ステップの場合には確率的重みがマルコフ的ではないために考察が困難である。申請者は、正則性を仮定したり辞書積の場合に限定することで漸化式を与えることで困難性を回避し、帰納的な関数を利用することでこれらの場合にも構成成分グラフの固有値を用いてすべての(p,q)に対して(p,q)ステップのラプラス作用素の固有値を記述することに成功している。同じ固有値を持つが同型ではない多様体やグラフを構成することは等スペクトル問題として M. Kac が1966年に提起して以来重要なテーマとなっているが、この考察によりケーラーグラフの関しては頂点推移的である同じ固有値を持つが同型ではないものを多く構成できることが示されている。

本研究の成果は、4編の学術論文及び1編の論説として公表(予定を含む)され、複素多様体の離散モデルに対する基礎研究を成しており、幾何学の立場から離散数学への新たなテーマを与えており、本学課程博士(学術)の学位論文として十分な価値を有する物と認める。