

セキ セイソン

氏 名	SHI QINGSONG
学 位 の 種 類	博士（学術）
学 位 記 番 号	博第1120号
学位授与の日付	平成30年3月26日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当 課程博士
学 位 論 文 題 目	Comparison Theorems on Trajectory-Harps and the Ideal Boundary of a Hadamard Kahler Manifold (軌道ハーブの比較定理とアダマール・ケーラー多様体の理想境界)

論 文 審 査 委 員	主 査	教授	足立 俊明
		教授	松添 博
		准教授	大橋 美佐

論文内容の要旨

リーマン多様体の代表的な研究手法の1つに、ある多様体の測地線の性質を調べることとでその多様体の性質を考察するという方法がある。この発想を展開して、多様体の幾何構造に関連した測地線を含む曲線族の考察を行うことにより、多様体の性質や幾何構造の様子を考察する、という立場に立って、ケーラー多様体の考察を行った。ケーラー多様体は平行な複素構造を有しており、速度ベクトルと加速度ベクトルとが複素線を構成する定測地曲率を持つ曲線である、ケーラー磁場による軌道を道具として研究を進めた。

本研究では、ケーラー磁場による軌道と測地線との関係を調べるという観点に立って軌道を考察し、多様体の構造の研究を行った。この考察の代表的な対象が軌道ハーブとよばれるもので、一本の軌道半線とその始点と軌道上の各点とを結ぶ測地線族で構成される。軌道ハーブの長さを表現する量として測地線分の長さ(弦長)と太さを表現する量として測地線の初期ベクトルがなす角(天頂角)および測地扇形の弧長を考えた。軌道ハーブが測地線の変分から構成されることから、古典的な結果であるラウチの比較定理を利用することができ、測地線を用いた多様体の考察時に重要であったトポノゴフの三角形の比較定理に対応した軌道ハーブに比較定理を得ることができた。この結果を感覚的に述べると、断面曲率が大きい多様体の軌道ハーブは短く太いということになる。軌道ハーブの比較定理の最も重要な点は、ある点での弦長が複素空間形での弦長と一致する場合は、その点までで構成される部分軌道ハーブが全測地的かつ全複素的な定正則断面

曲率複素線の一部分になることがわかる点である。これは複素構造と部分多様体の構造を同時に把握する結果になっている。

考察のもう1つの対象が軌道ホルンとよばれるもので、一本の測地半線とその始点と測地線の各点とを結ぶケーラー磁場による軌道族から構成される。こちらは軌道の変分から構成されることから、磁性ヤコビ場を利用して考察を行った。いずれも軌道ホルンの太さを表現する量であるが、軌道線分の長さである管長、軌道の初期ベクトルがなす角である吹き角および一定の長さの軌道が構成するベルの口径を考察した。各管を構成する軌道から軌道ハープを構成したときに、初めに与えられた測地線と弦とが一致する状況を利用して軌道ホルンの比較定理を与えた。

これらの比較定理は、それ自身ケーラー多様体の構造の手がかりを与える結果であるが、特に負曲率ケーラー多様体の考察に役立った。古典力学系の結果により、磁力が十分小さい場合には、軌道が作る力学系である磁性流は測地線が作る測地流と同じ双曲的性質を持つことがわかっていたが、ケーラー多様体の断面曲率と磁力の関係を本研究で明確にした。単連結非正曲率多様体(アダマール多様体)は、測地半線の漸近類により理想境界とよばれる無限遠点の集合を付加することでコンパクト化されていて、理想境界の性質からアダマール多様体族の中でユークリッド空間が特徴付けられている。この点で軌道族と理想境界との関係を調べる必要がある。負曲率アダマール・ケーラー多様体の断面曲率の上限を c と表したときに、磁力が $|c|$ の平方根以下であれば、弦長と天頂角に関する軌道ハープの比較定理により、軌道は無限遠に発散しかつある無限遠点に収束することがわかった。このことから軌道の無限遠点は理想境界の中でどの程度部分を占めるのかという問題が生ずるが、軌道ホルンの吹き角の比較定理を利用することで、磁力が $|c|$ の平方根未満であれば、ケーラー多様体の各点を固定して考えると、この点から出る軌道の無限遠点と理想境界の点とが1対1上への対応になっており、磁力が $|c|$ の平方根と一致すれば上への対応になっていることがわかった。更に、軌道ハープの扇形の弧の長さに関する比較定理を適用することで、磁力が $|c|$ の平方根未満であれば、理想境界の異なる二点に対して、この二点を無限遠点とする軌道が存在することを示した。これらの結果は、アダマール多様体に関する研究の出発点となっているエバーライン=オニールの結果の軌道版になっている。

論文審査結果の要旨

リーマン幾何学においては測地線の性質からリーマン多様体の形状を考察することは古くからなされてきた代表的な研究手法の1つである。本論文で取り上げられているケーラー多様体のようにリーマン計量の他に幾何構造を持つ多様体に対しては、幾何構造に関連した測地線を含む曲線族を考察することで、多様体の性質や幾何構造の様子を調べることができないかという問題を考えることができる。

本論文では、ケーラー多様体に付随する重要な閉2形式であるケーラー形式の定数倍という形で表現される磁場を考え、その磁場の下での軌道の様子から底多様体の性質を調べるというプログラムに則り、単連結負曲率ケーラー多様体における軌道の漸近挙動を考察し、多様体の理想境界との関連性を考察することで、底多様体の断面曲率と磁力との関係を明確にしている。

軌道の様子を考察するために、軌道だけを取り上げるのではなく軌道と測地線との関連性を調べることで考察を進めている。まず、軌道と測地線の変分で構成される軌道ハープを考察対象に取り、測地線に関する基本道具であるラウチの比較定理を用いて、一般のケーラー多様体における軌道ハープを複素双曲空間などの複素空間形とよばれる定正則断面曲率を持つ多様体上の軌道ハープとの比較を行い、曲率が大きいほど軌道ハープは太く短いという性質を4章で導いている。もう1つの考察対象が、測地線と軌道の変分で構成される軌道ホルンである。この考察のために3章で軌道の変分から得られる磁性ヤコビ場の挙動を述べて、軌道ハープと同様の性質を得ている。これらは共に変分という形で面を構築しているが、基本的にはそれらの境界にあたる軌道と測地線とが作る2辺形が重要であり、リーマン幾何学における測地三角形に相当するものと考え、一連の結果はトポノゴフの比較定理に対応する結果であるということが出来る。これらの考察を基にして5章で単連結負曲率ケーラー多様体における軌道の漸近挙動を考察している。このアダマール多様体に対しては測地線族の漸近挙動を基にした理想境界が定義されているが、軌道族についても理想境界との関係が測地線と同等であるのか、という点は重要な問題である。一般的に、有界なものの取り扱いと極限操作を必要とする非有界なものの取り扱いには大きな差がある。本研究のように複数の極限を取る操作を行うときは特に慎重な議論が求められる。本論文では評価の一様性を用いることで有界な範囲での情報を極限操作に効果的に適用しており、磁性指数写像から誘導される漸近挙動写像は、磁力が底多様体の断面曲率の絶対値の平方根以下であれば全単射であり、磁力がこの値より真に小さければ異なる無限遠点は軌道で結ぶことができるという結果を与え、断面曲率と磁力との関係を明確にしている。更に、2章に述べてある複素双曲空間の例を述べることで、断面曲率の情報から得られる漸近挙動の情報はこれ以上改良することができないことも明らかにしている。

本研究の成果は5編の学術論文にまとめられ、アダマール・ケーラー多様体の理想境界の考察に大きな手がかりを与え今後の考察に重要な基礎を築いていることから、本学課程博士(学術)として十分の価値を有するものと認める。